THE ABEL PRIZE 2019

Академия Наук Норвегии приняла решение присудить Абелевскую премию за 2019 год

Карен Кескулла Уленбек

Техасский Университет в Остине (США)

«за ее первопроходческую деятельность и достижения в области геометрических дифференциальных уравнений в частных производных, калибровочной теории и интегрируемых систем, а также за фундаментальное влияние ее трудов на такие области, как анализ, геометрия и математическая физика.»

Карен Кескулла Уленбек (Karen Keskulla Uhlenbeck) является одним из основателей современного геометрического анализа. Именно ее подход пронизывает всю эту область математики и привел к некоторым наиболее драматическим прорывам в математике за последние 40 лет.

Геометрический анализ является областью математики, где различные методы анализа и решений дифференциальных уравнений переплетаются с изучением геометрических и топологических задач. В частности, геометрический анализ занимается изучением таких объектов, как кривые, поверхности, соединения и поля, которые являются критическими точками функций, представляющих геометрические величины, такие, как энергия и объем. Например, минимальные поверхности являются критическими точками площади, а гармонические отображения являются критическими точками энергии Дирихле. Среди важнейших научных вкладов Уленбек – фундаментальные результаты в области минимальных поверхностей и гармонических отображений, в теории Янга – Миллса и интегрируемых систем.

Минимальные поверхности и анализ пузырьков

Важным инструментом глобального анализа, предваряющим труд Уленбек, является условие компактности Пале-Смейла. Это условие, инспирированное ранней работой Морса, гарантирует существование минимайзеров геометрических функционалов и приводит к хорошим результатам в случае 1-мерных пространств, таких, как геодезически закрытые пространства.

Уленбек поняла, что условие Пале-Смейла неприменимо к поверхностям по топологическим причинам. Работы, написанные Уленбек в соавторстве с Саксом по энергетическим функционалам для отображения поверхностей в Римановых многообразиях, оказали огромное влияние и описывают в деталях, что происходит, когда нарушается условие Пале-Смейла. Минимизирующаяся серия отображений сходится (конвергируется) вне бесконечного ряда особых точек. Используя методы ренормирования, они описали поведение около сингулярностей как *пузырьки* (bubbles) или *инстантоны* (instantons), которые являются стандартным решением минимизирующего отображения из двумерной сферы в заданное многообразие.

В многомерном случае Карен Уленбек, в сотрудничестве с Ричардом Шоном (Richard Schoen) написала две фундаментальные работы о минимизации гармонических отображений. Они продемонстрировали глубокое понимание сингулярности решений нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Сингулярное множество, которое в случае с поверхностями состоит только из изолированных точек, в многомерном случае заменяется множеством соразмерности 3.

Методы, использованные в этом революционном труде, сейчас являются стандартным набором инструментов каждого геометра и аналитика. Они с большим успехом применялись и в отношении многих других видов дифференциальных уравнений в частных производных, а также во многих других геометрических контекстах. В частности, феномен пузырьков возникает во многих работах в области дифференциальных уравнений в частных производных, в изучении задачи Ямабе, в теории псевдоголоморфных кривых Громова, а также в применении инстантонов в физике, в частности в теории струн.

Калибровочная теория и уравнения Янга-Миллса

После посещения лекции Атья в Чикаго, Уленбек заинтересовалась калибровочной теорией. Она одной из первых занялась изучением уравнений Янга-Миллса с чисто аналитической точки зрения. Ее работы создали основу для всех последующих исследований в области калибровочной теории.

Калибровочная теория предполагает дополнительное расслоение на Римановом многообразии. Основными объектами изучения являются связности на этом расслоении. После выбора тривиализации (калибровки), связность может быть описана матричной 1-формой. Связности Янга-Миллса являются критическими точками калибровочно-инвариантных функционалов. Уленбек вплотную занялась изучением этого фундаментального вопроса и нашла решение фундаментальной задачи представления уравнения Янга-Миллса как эллиптической системы, используя так называемую калибровку Кулона. Это было отправной точкой как для знаменитой теоремы Уленбек о компактности для связностей с кривизной, ограниченной L^p, так и для результатов, полученных ею позже и касающихся устранимых сингулярностей для уравнений Янга-Миллса, определенных с помощью пунктированных 4-мерных шаров. Теория устранимых сингулярностей для уравнений Янга-Миллса в больших размерностях была создана намного позже Ганом Тянем (Gang Tian) и Теренсом Тао (Terence Tao). Теорема компактности Уленбек сыграла ключевую роль в неабелевой теории Ходжа и, в особенности, в доказательстве того, что отображение Хитчина является собственным, и важного результата Корлетт, касающегося существования эквивариантных гармонических отображений.

Другим существенным результатом деятельности Уленбек является ее совместная работа с Яу о существовании эрмитовых связей Янга-Миллса в устойчивых голоморфных векторных расслоениях на комплексных n-многообразиях, обобщающая более ранний результат Дональдсона, касающийся комплексных поверхностей. Этот результат совместной работы Доналдсон-Уленбек-Яу связывает достижения в области дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии и является основополагающим для применения гетеротических струн в физике частиц.

Идеи Уленбек заложили аналитический фундамент для применения калибровочной теории в геометрии и топологии, для важного труда Таубе о склеивании самодвойственных 4-мерных многообразий, для новаторской работы Дональдсона о калибровочной теории и 4-мерной топологии и многих других работ в этой области. Книга, написанная Уленбек и Даном Фридом «Инстантоны и топология 4-мерных многообразий» стала руководством и вдохновением для целого поколения дифференциальных геометров. Она продолжила работать в этой области и получила, в частности, очень важный результат вместе с Лесли Сибнером и Робертом Сибнером, касающийся не самодвойственных решений уравнений Янга-Миллса.

Интегрируемые системы гармонических отображений

Изучение интегрируемых систем уходит своими корнями в классическую механику 19-го столетия. Применив язык калибровочной теории, Уленбек и Хитчин поняли, что гармоническое отображение от поверхностей на гомогенные пространства разбиваются на 1-мерные параметрические семейства. Основываясь на этом наблюдении, Уленбек алгебраически описала гармоническое отображение от сфер в Грасманнианы, установив связь их с бесконечномерной интегральной системой и действиями Вирасоро. Эта плодотворная работа привела к серии последующих основополагающих работ Уленбек и Чу-Лян Тэн на эту тему и созданию активной и плодотворной школы.

Влияние исключительно важных научных трудов Уленбек выходит за пределы геометрического анализа. Оказавшая сильное влияние статья, опубликованная в ранние годы, была посвящена исследованию теории регулярности системы нелинейных эллиптических уравнений, которая является актуальной для исследования критического отображения энергетических функционалов высокого порядка между римановыми многообразиями. Эта работа обобщает результаты о регулярности решения нелинейных сингулярных уравнений, полученные ранее Нэшем, Де Джорджи и Мозером, распространяя их также и на решения систем.

Новаторские результаты, полученные Карен Уленбек, оказали фундаментальное влияние на современный анализ, геометрию и математическую физику, и ее идеи и ведущая роль полностью изменили весь математический ландшафт.