THE ABEL PRIZE 2019

挪威科学与文学院决定将 2019 年的阿贝尔奖授予

# 卡伦·乌伦贝克 (Karen Keskulla Uhlenbeck)

德克萨斯州大学奥斯汀分校

简短引文：
她在几何偏微分方程、规范理论和可积系统方面取得的开创性成就以及她的分析、几何和数学物理工作产生的基本影响

详细引文：

Karen Keskulla Uhlenbeck 是现代几何分析的创始人。
她的观点已渗透到这个领域，并推动数学界在过去 40 年里取得最显著的进步。

几何分析是一个数学领域，其中分析技术和微分方程与几何和拓扑问题的研究交织在一起。具体而言，学者们研究曲线、曲面、联络和场等对象，这些对象是表示几何量（如能量和体积）的函数的临界点。例如，极小曲面是面积的临界点，而调和映射是 Dirichlet 能量的临界点。Uhlenbeck 的主要贡献包括极小曲面和调和映射的基础性成果、杨·米尔斯理论和可积系统。

## 极小曲面和冒泡分析

在 Uhlenbeck 的工作之前，一个重要的整体分析工具是 Palais-Smale 紧性条件。这种条件受启发于莫尔斯的早期工作，保证存在几何函数的最小值，并且在 1 维域（闭测地线）的情况下很成功。

Uhlenbeck 意识到由于拓扑原因，Palais-Smale 条件在曲面的情况下失败了。Sacks 与 Uhlenbeck 共同撰写的关于曲面映射到黎曼流形的能量泛函的论文具有很大的影响力，并详细描述了当违反 Palais-Smale 条件时会发生的情况。最小化映射序列在有限的奇异点集外收敛，并使用尺度论证法将奇异点附近的行为描述为气泡或瞬间，这是从 2 球面到目标流形的最小化映射的标准解。

在更高的维度上，Uhlenbeck 与 Schoen 合作撰写了两篇关于最小化调和映射的基本论文。基本论文深刻阐述了非线性椭圆偏微分方程解的奇异点。奇异集（在曲面仅由孤立点组成的情况下）在更高维度上由一组余维数为3的集合取代。

这些革命性论文中使用的方法应用到每个几何学者和分析学者的标准工具箱中。这些方法也成功应用到许多其他偏微分方程和几何背景中。特别地，冒泡现象出现在偏微分方程、Yamabe 问题研究、Gromov 伪全纯曲线研究和瞬子物理应用的许多工作中，特别是弦理论中。

## 规范理论和杨·米尔斯方程

Uhlenbeck 听取了 Atiyah 在芝加哥的演讲后，开始对规范理论产生兴趣。她从严谨的分析角度开创了对杨·米尔斯方程的研究。她的工作是规范理论领域所有后续研究的基础。

规范理论涉及黎曼流形上的辅助矢量束。
研究的基本对象是该矢量束上的联络。在选择平凡化（规范）之后，可通过矩阵值 1 形式来描述联络。杨·米尔斯联络是规范不变函数的临界点。Uhlenbeck 使用所谓的库仑规范解决了将杨·米尔斯方程表示成椭圆型方程组的基本问题。这是 Uhlenbeck 著名的用于以 $L^p$ 为界之曲率联络的紧致性定理的起点，也是她后来的针对穿孔 4 维球上定义之杨·米尔斯方程的可移动奇异点结果的起点。Gang Tian 和 Terence Tao 后来贯彻了更高维度的杨·米尔斯方程的可移动奇异点理论。Uhlenbeck 的紧致性定理对于 Non-Abelian Hodge 理论，特别是对于证明 Hitchin 映射的合理性及 Corlette 关于等变调和映射存在的重要结果至关重要。

Uhlenbeck 的另一个主要成果是她就复杂 n-流形上稳定的全纯矢量束上的 Hermitian Yang-Mills联络是否存在与 Yau 联合开展研究，推导了 Donaldson 的复杂曲面上的早期结果。

Donaldson-Uhlenbeck-Yau 的结果将微分几何和代数几何学的发展联系起来，并且是将杂化弦应用于粒子物理学的基本结果。

Uhlenbeck 的思想为规范理论在几何学和拓扑学、Taubes 在自对偶 4维流形粘合方面的重要工作、Donaldson 在规范理论和 4 维拓扑学方面的开创性工作以及该领域的许多其他工作中的应用奠定了分析基础。Uhlenbeck 和 Dan Freed 撰写的关于“瞬子和 4维流形拓扑”一书指导和启发了一代微分几何学者。她继续在该领域工作探索，特别地，她与 Lesley Sibner 和 Robert Sibner 在杨·米尔斯方程的非自对偶解方面取得了重要成果。

## 可积系统和调和映射

可积系统的研究源于 19 世纪的经典力学。
Uhlenbeck 和 Hitchin 使用规范理论的语言，意识到从曲面到齐性空间的调和映射来自 1 维参数化族。基于这一观察，Uhlenbeck 描述了从球面到格拉斯曼的代数调和映射，将所述映射与无穷维可积系统和 Virasoro 行为相关连。这项开创性的工作促使 Uhelenbeck 和 Chuu-Lian Terng 撰写了一系列关于这一主题的更基础的论文并建立了一个活跃而富有成效的学派。

Uhlenbeck 核心工作的影响超出了几何分析。一篇极具影响力的早期文章致力于研究非线性椭圆型方程组的正则理论，该研究与黎曼流形之间高阶能量泛函的临界映射的研究相关。这项研究扩展了 Nash、De Giorgi 和 Moser 关于方程组解的单一非线性方程解之正则的先前研究成果。

Karen Uhlenbeck 的开创性成果对当代分析、几何和数学物理产生了根本性的影响，她的思想和领导作用已改变了整个数学领域。