Om Atiyah--Singer Indeks-teoremet

Professor John Rognes
Universitetet i Oslo

4. Atiyah—Singer indeks-teoremet

Her er en knapp formulering av indeks-teoremet:

Teorem (M.F. Atiyah og I.M. Singer, 1963):
La $P(f) = 0$ være et system av differensial-likninger. Da er den analytiske indeksen til P lik den topologiske indeksen til P.

Dette er et rent matematisk resultat. Jeg skal forsøke å forklare litt om hva det handler om, hvorfor det er viktig, og hva det kan brukes til.

Moderne anvendelser av matematikk tar gjerne utgangspunkt i en **matematisk modell** for en del av virkeligheten, og en slik modell er veldig ofte beskrevet ved et **system av differensial-likninger**. For å dra nytte av modellen trenger man å finne frem til **løsningene** til dette systemet av differensiallikninger. Å finne disse løsningene er et grunnleggende matematisk problem, men det er ofte nesten umulig å løse.

Innsikten til Atiyah og Singer var at det likevel alltid er mulig å svare på et litt annet spørsmål, nemlig: "**Hvor mange løsninger** har systemet av differensial-likninger?" Atiyah—Singer indeks-teoremet forteller oss at dette spørsmålet er mye lettere å besvare, og at svaret bare avhenger av **formen** på det geometriske området der modellen finner sted. Spørsmålet om antallet løsninger til det **analytiske** problemet har altså et rent **topologisk** svar.

5. Trekanter og firkanter

En enkel analogi kan være å se på trekanter og firkanter i planet. Det kan være komplisert å finne frem til vinklene i hjørnene til noen av disse figurene, men en gang før Euklid (ca. 300 f. Kr.) innså noen at summen av vinklene i alle hjørnene alltid er 180 grader for en trekant og 360 grader for en firkant. Svaret på **dette** spørsmålet er altså lett å gi, og avhenger bare på en enkel måte av formen til figuren, nemlig om den har tre eller fire kanter.

6. Innhold

Jeg skal si litt mer om hva vi mener med systemer av differensial-likninger, analyse og topologi, og så skal jeg beskrive noen matematiske modeller. Så skal jeg komme tilbake til indeks-teoremet, denne gang med litt flere detaljer, og til slutt skal jeg forsøke å trekke trådene sammen til en konklusjon.

I begynnelsen ble matematikk brukt til å telle, f.eks. for regnskap, planlegging eller handel (aritmetikk), og til å beskrive former, f.eks. for å måle opp ett landstykke, å klippe til stoff for en drakt, eller å bygge en bro (geometri).

Mer moderne anvendelser av matematikk handler ofte om å kunne modellere og dermed forutsi utviklingen over tid av et komplekst sammensatt system, som f.eks. hvordan olje og gass strømmer i porøse bergarter under Nordsjøen, hvordan køer av tekstmeldinger i telenettet best kan avvikles, eller hvordan været blir til helgen.

7. Systemer av differensial-likninger

Siden Newton og Leibniz (ca. 1700 e. Kr.) er disse matematiske modellene nesten alltid blitt beskrevet ved et **system av differensial-likninger**. For å bruke matematikken til den tenkte anvendelsen søker man å finne **løsningene** til dette systemet.

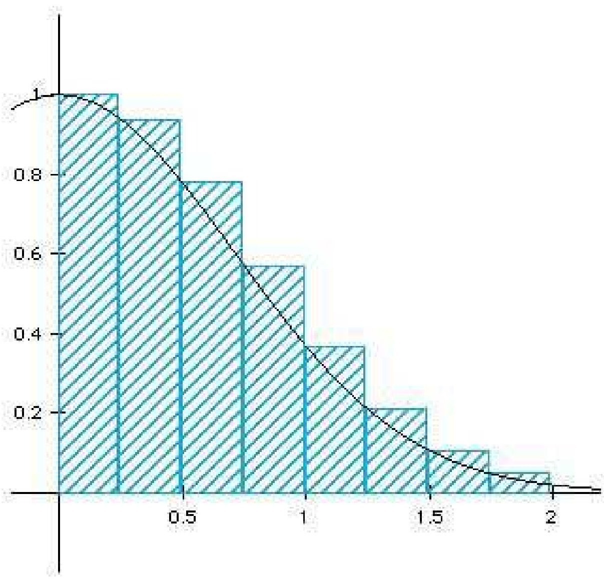
Atiyah—Singer indeks-teoremet er en fundamental innsikt som sier at vi kan finne ut **hvor mange løsninger** systemet har, essensielt bare ved å kjenne en del enkle, fleksible opplysninger om **formen** til det området som modelleres.

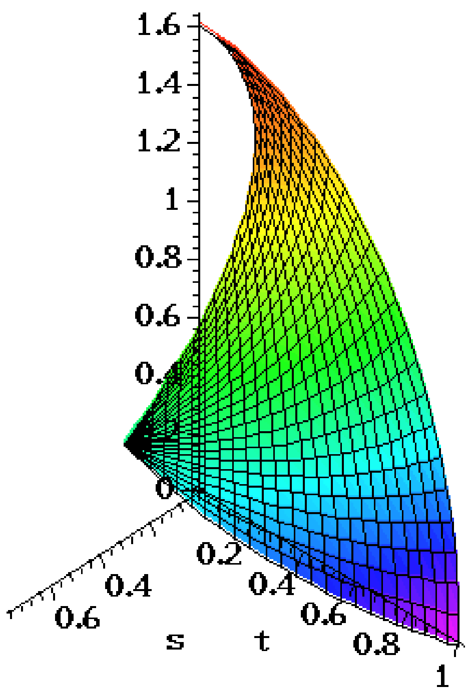
Selv om indeks-teoremet er et rent matematisk resultat, som knytter sammen analyse og topologi, så kan det derfor brukes som et verktøy i nesten alle anvendelser av matematikk.

Faget matematikk kan grovt deles inn i fire områder: **algebra**, **analyse**, **topologi** og **logikk**. Det er likevel ingen klare grenser mellom områdene, og matematikken lever heller ikke isolert fra andre fag. Vi skal her fremheve analyse (fra gresk “analyein”, å bryte opp) og topologi (fra gresk “topos”, sted).

8. Analyse

I **analyse** studeres et objekt ved først å dele det opp i små biter og deretter å sette dem sammen igjen (syntese). Særlig studeres grensetilfellet der bitene blir vilkårlig små, og samtidig vilkårlig mange. Noen stikkord kan være: derivasjon, integrasjon og kalkulus.



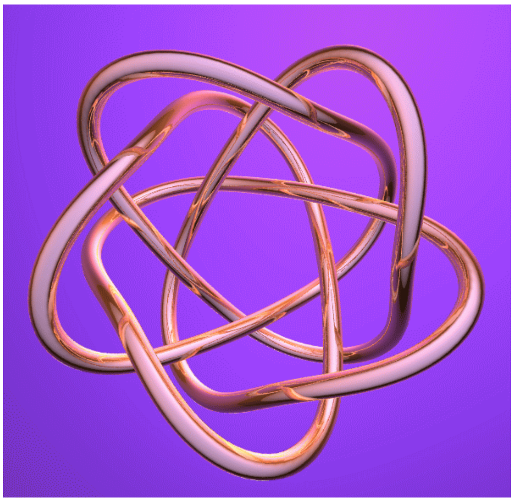
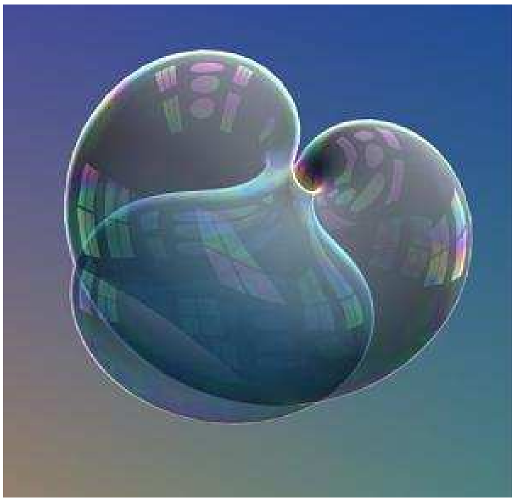


Areal under en kurve Et seil?

Arealet under kurven kan tilnærmes ved å dele det opp i smale, vertikale strimler, og seilets evne til å fange vinden kan beregnes som summen av bidragene fra mange små stykker seilduk.

9. Topologi

I **topologi** studeres hvordan et objekt kan ha en form, eller et romlig aspekt. Særlig studeres egenskapene ved den globale, helhetlige formen, fremfor de lokale. Dersom formen er beskrevet ved et avstandsbegrep snakker vi gjerne om **geometri**.

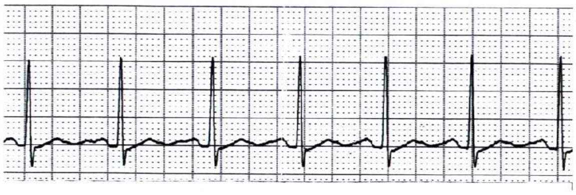
M.Thistlethwaite: “Symmetric knot”
G. Francis, J. Sullivan og S. Levy: “Spherical eversion”

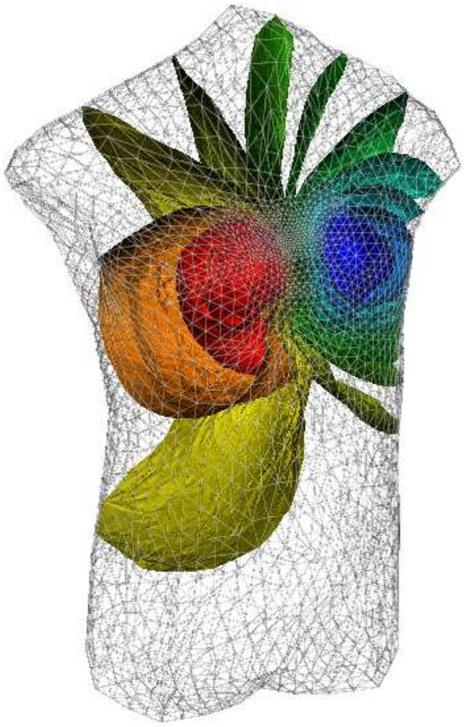
Disse bildene illustrerer konkrete, romlige former.

En matematisk modell er et forsøk på å beskrive (en del av) virkeligheten i et matematisk språk. Man kan også forsøke å beskrive virkeligheten med normalt språk, men det matematiske språket har den fordelen at man kan argumentere og resonnere med det på en helt presis og uomtvistelig måte. Dermed kan man forfølge en tankerekke i matematisk språk i svært mange trinn og likevel forvente at konklusjonen “om virkeligheten” er korrekt.

10. Matematiske modeller

En matematisk modell finner gjerne sted i en eller annen romlig form -- et område -- som vi kaller X. Dette matematiske “rommet” må forstås som noe mer generelt enn en 2- eller 3-dimensjonal figur som man kan se for seg. Det kan f.eks. godt svare til både tid og rom i fysisk forstand. I en meteorologisk modell kan et punkt i X svare til et bestemt sted i atmosfæren over den nordlige halvkule på en bestemt tid i den kommende uken. I en medisinsk modell for de elektriske impulsene som regulerer hjertet kan et punkt i X svare til et sted i kroppen på et bestemt tidspunkt i løpet av en rekke hjerteslag.





Elektrokardiogram (EKG) Torso

Tilstanden til modellen beskrives med en rekke tall i hvert punkt i X, f.eks. temperaturen, lufttrykket, luftfuktigheten, vindhastigheten osv. på det bestemte stedet i atmosfæren og den bestemte tiden. Matematisk sett beskrives denne tilstanden ved en rekke **funksjoner** f definert på rommet X. I den medisinske modellen kan en slik funksjon angi den elektriske feltstyrken på de ulike stedene i kroppen til de ulike tidene. Feltstyrken i selve hjertet regulerer sammentrekningen av hjertemuskelen. De fargede flatene i bildet til høyre viser områder i torso med samme elektriske feltstyrke nær begynnelsen av et hjerteslag. Senere i løpet av hjerteslaget er fordelingen av feltstyrken langt mer komplisert. Elektrokardiogrammet viser tidsutviklingen, men forteller oss bare noe om feltstyrken på overflaten av torso, dvs. på huden.

11. Løsninger av differensial-likninger

De fysiske lovene som beskriver hvordan temperaturen, lufttrykket, osv. (eller den elektriske feltstyrken) vil forandre seg er godt kjent så lenge man bare ser på et lite område i X, dvs. bare ser på en liten del av atmosfæren (eller kroppen), for et kort tidsrom. Disse lovene kan formuleres som en samling av likninger, dvs. et likningssystem.

Disse likningerne involverer de funksjonene f som beskriver tilstanden i modellen, men også de **deriverte** $f'(x) = df/dx$ til disse funksjonene. Dette er nye funksjoner som uttrykker hvordan tilstanden endrer seg, enten fra ett sted til et annet, eller fra ett tidspunkt til et annet.

En samling av likninger der de ukjente er funksjoner, og som også involverer de deriverte funksjonene, kalles et **system av differensial-likninger**. Et slikt system kan kort skrives på formen $P(f) = 0$, der P står for "partiell differensial-operator", eller kanskje enklere for "problem". En rekke funksjoner f på X som er slik at alle likningene er oppfylt beskriver en fysisk mulig tilstand, og kalles en **løsning** til likningssystemet.

I nesten alle de mangfoldige anvendelsene som finnes av matematisk modellering ønsker man å vite noe om løsningene til slike systemer av differensial-likninger.

12. Elektrisk potensial i hjertet og på huden

((Animasjon som illustrerer spredningen av elektriske impulser fra hjertet. Ønsker å kunne spole utviklingen bakover, for å kunne rekonstruere hva som skjer inne i hjertet, ut fra målingene på huden (EKG). Dette vil muliggjøre en mer presis diagnose.))

13. Analytisk indeks

I realistiske anvendelser er det oftest svært vanskelig å finne løsningene til et system av differensial-likninger. Derfor er det nyttig å først få vite om det finnes noen løsninger i det hele tatt. Hvis ikke, så er det trolig noe som må endres i den matematiske modellen. Deretter vil det være nyttig å vite om det er én eller mange løsninger, og hvis det er mange, så vil man gjerne ha et mål på hvor mange det er.

Den **analytiske indeksen** til P er et slikt mål. Det er et helt tall, som essensielt er **antallet løsninger** til systemet av differensial-likninger $P(f) = 0$. Hvis f.eks. den analytiske indeksen er positiv, så **vet** vi at systemet har interessante løsninger.

Mer presist er den analytiske indeksen lik antallet parametre som må til for å beskrive alle løsningene til likningene, minus antallet relasjoner som finnes mellom uttrykkene *P(f)* .

((Er du ikke matematiker, så tenk på den analytiske indeksen som antallet løsninger til systemet.))

En hypotetisk metode for å finne den analytiske indeksen til et system er å finne alle løsningene, og så telle dem opp. Dette er ikke en praktikabel metode. Men Atiyah—Singer indeks-teoremet gir oss en fantastisk snarvei. Det er bevist at den analytiske indeksen har en annen, alternativ beskrivelse som den **topologiske indeksen** til systemet, og for å beregne denne er formen, eller topologien, til det området der modellen finner sted alt som man trenger å kjenne til .

14. Indeks-teoremet, en gang til

Her er en mer presis formulering av indeks-teoremet.

Teorem (Atiyah og Singer):
La $P(f) = 0$ være et elliptisk system av partielle differensial-likninger definert over en lukket, glatt, orientert n-dimensjonal mangfoldighet X . Da er den analytiske indeksen til P (essensielt: antallet løsninger til systemet) lik den topologiske indeksen til P , som er gitt ved følgende eksplisitte, algebraisk-topologiske formel:

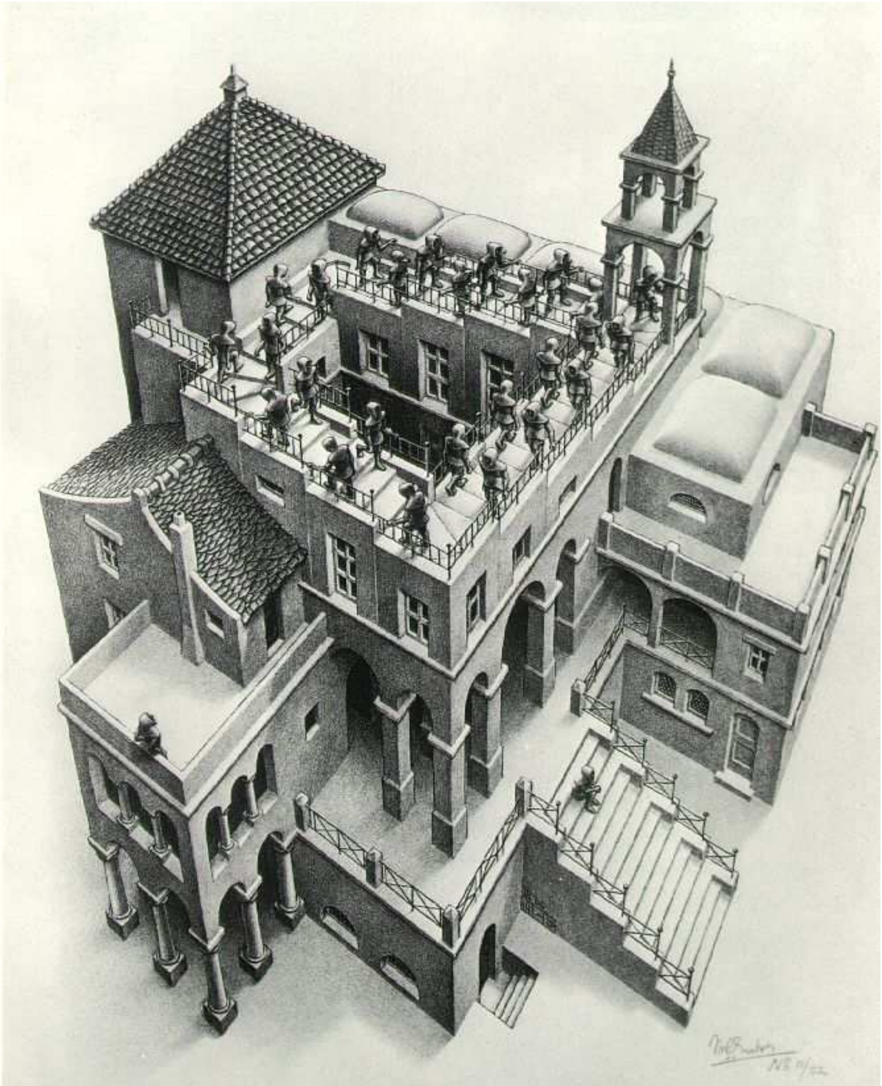
$$\textit{topologisk indeks}(P) := (-1)^n < ch\,(s(P))\,.\, td\,(T_C X)\,,\,[X] >$$

((Pluss/minus Chern karakteren til symbolet til P cuppet med Todd klassen til den kompleksifiserte tangentbunten til X, evaluert på fundamentalklassen til den orienterte mangfoldigheten X.))

Ingrediensene i denne formelen er begrepsmessig kompliserte, men ikke vanskeligere å beregne enn at de kan bearbeides direkte av en matematiker. Uttrykket avhenger essensielt bare av formen, dvs. topologien, til rommet X der likningene finner sted.

15. Bemerkninger

Følgende illustrasjon er nevnt i pressemeldingen.



M. C. Escher’s ”Ascending and Descending”

En vandrer går rundt, opp eller ned i en trapp. Her er den romlige formen X en firkant, mens tilstanden er funksjonen f gitt ved at $f(x)$ er lik høyden over bakken i hvert sted x på X. Indeks-teoremet bekrefter det vi intuitivt vet, at vandreren ikke kan gå oppover hele tiden og likevel komme tilbake til utgangspunktet.

Atiyah—Singer indeks-teoremet har historiske forløpere, så som Riemann—Rochs formel i algebraisk geometri og Hirzebruchs signatur-teorem, og forener disse fullstendig. Det har derfor en stor erkjennelsesmessig og estetisk verdi.

Gelfand formodet i ca. 1960 at den analytiske indeksen kunne ha en rent topologisk beskrivelse, men det var Atiyah og Singer som oppdaget og beviste den riktige formen for denne beskrivelsen. I dette arbeidet tok de i bruk topologisk K-teori, som var et nytt topologisk verktøy utviklet av Atiyah og Hirzebruch, inspirert av et tilsvarende algebraisk-geometrisk verktøy definert av Grothendieck.

Atiyah—Singer indeks-teoremet var en nøkkel til en meget fruktbar oppblomstring av idéutvekslingen mellom matematikk og teoretisk fysikk på 1980- og 90-tallet:

Matematiske metoder avledet fra indeks-teoremet ble brukt av Witten i fysikken for å utvikle "streng-teori," som er et forsøk på å finne en felles forklaring for tyngdekraften (som vi forstår i stor skala ved hjelp av relativitetsteorien) og for elektro-magnetismen og de andre kreftene (som vi forstår i liten skala ved hjelp av kvantemekanikken).

Omvendt ble også idéer fra fysikken, så som studiet av magnetiske monopoler og kortlevde "instanton"-partikler, brukt i matematikken av Donaldson for å oppdage nye, eksepsjonelle egenskaper ved fire-dimensjonale differensiable rom.

16. Konklusjon

Atiyah—Singer indeks-teoremet er et rent matematisk resultat. Det forteller at et fundamentalt problem i analyse, nemlig hvor mange løsninger som finnes til et system av differensial-likninger, har et konkret svar i topologi. Dette er en snarvei til spørsmålet om slike løsninger finnes eller ikke.

Teoremet er verdifullt fordi det forbinder analyse og topologi på en vakker og innsiktsfull måte. Det er praktisk fordi det forklarer hvordan de mangfoldige anvendelser som finnes av den matematiske analysen kan nyttiggjøre seg av de romlige, eller topologiske, strukturene i problemstillingen.

Mange takk for oppmerksomheten!

17. Abel-prisen