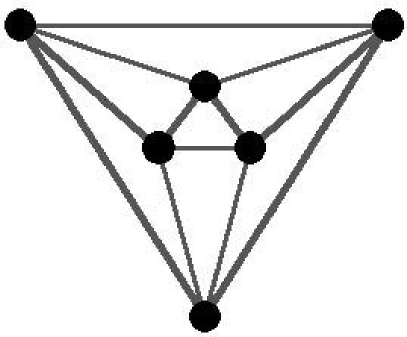
# Abelprisvinneren 2012
Endre Szemerédi

# *Szemerédis regularitetslemma*

**En hovedingrediens i Szemerédis teorem om aritmetiske progresjoner i mengder av positiv tetthet er Szemerédis regularitetslemma. Szemerédi baserte sitt bevis for teoremet på en svak versjon av dette lemmaet, for todelte grafer. Senere beviste han også en sterkere versjon, for mer generelle grafer.**

Szemerédis regularitetslemma er et resultat innen grafteori. Lemmaet sier at enhver stor nok graf kan deles inn i delmengder av omtrent lik størrelse, slik at mengden av kanter mellom ulike delmengder framstår som slumpmessig (engelsk: randomlike). Szemerédi introduserte i 1975 en svak versjon av dette lemmaet, begrenset til såkalte todelte grafer. Det var hva han trengte for å bevise Szemerédis teorem. I1978 beviste han lemmaet i sin fulle generalitet.

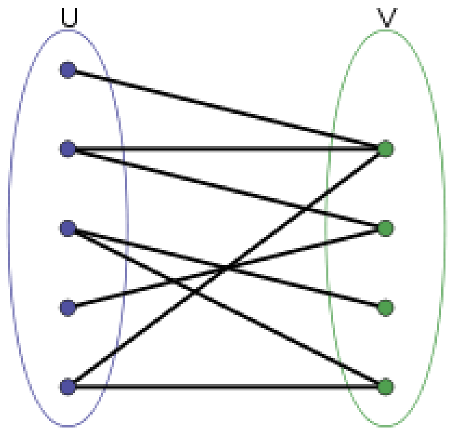
En graf består av noder og kanter. Kantene er forbindelseslinjer mellom nodene, og mellom to noder kan det være en forbindelse, men det trenger ikke. En graf kan betraktes som et abstrakt matematisk objekt, eller som en illustrasjon av et nettverk. Et veikart er et eksempel på en graf, hvor veikryssene er nodene og veiene er kantene mellom nodene. Bekjentskaps-grafen er et annet eksempel, der nodene er en samling av mennesker og kantene representerer bekjentskap. Grafer kan ha alle mulige former for kompleksitet, de enkleste er grafer med kun noder og ingen kanter. En graf med kanter mellom alle par av noder kalles en *komplett* graf. Generelt vil en tilfeldig valgt graf ligge et sted i mellom disse ytterpunktene.



*En graf med seks noder og tolv kanter*

For en gitt graf betrakter vi to disjunkte delmengder $X$ og $Y$ av noder. Dersom alle nodene i $X$ er forbundet med alle nodene i $Y$, så vil antallet kanter, $e(X,Y)$ mellom de to mengdene være produktet av antall noder i de to mengdene. Generelt vil det imidlertid være færre kanter. Forholdet mellom det faktiske antallet kanter mellom noder i de to mengdene $X$ og $Y$, og det største mulige antallet, gitt ved produktet av kardinaliteten til mengdene, kalles tettheten $d(X,Y)$ til paret $(X,Y)$. Tettheten er 1 dersom alle mulige kanter mellom nodene i de to mengdene er til stede, og den er 0 dersom det ikke finnes noen kanter i det hele tatt. Man kan tenke på tettheten som en gjennomsnittlig sannsynlighet for at det eksisterer en kant mellom to tilfeldig valgte noder i de to mengdene $X$ og $Y$.

La $(X,Y)$ være et par av noder med tetthet $d(X,Y)$. For ulike valg av delmengder $U$ og $V$ av $X$ og $Y$, henholdsvis, kan vi beregne tettheten $d(U,V)$ på samme måte som over. Regulariteten av paret $(X,Y)$ måler hvordan tettheten varierer når vi gjennomløper alle par av delmengder av $X$ og $Y$, av en viss størrelse. Jo mindre variasjon, jo større regularitet. I det komplette tilfellet, hvor alle noder i $X$ er forbundet med alle noder i $Y$, har vi full regularitet. Det andre ytterpunktet, en graf uten noen kanter mellom $X$ og $Y$ i det hele tatt, har også full regularitet. Og kanskje litt overraskende, der-

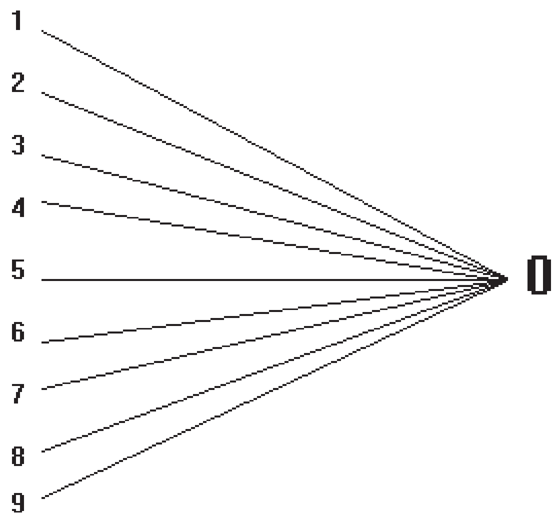



*Tettheten av paret (U,V) er d(U,V)=8/20=0,4*

som kantmengden til paret $(X,Y)$ framstår som slumpmessig, så vil paret $(X,Y)$ ha høy regularitet. Grunnen til dette er at for en kantmengde som framstår slumpmessig, så er den gjennomsnittlige sannsynligheten for å finne en kant mellom to noder, mer eller mindre uavhengig av hvilke delmengder av $X$ og $Y$ vi betrakter.

For en vilkårlig graf vet vi i allminnelighet veldig lite om kantmengden. Men Szemerédis regularitetslemma gir oss en måte å betrakte grafen slik at kantmengden framstår i et mer håndterbart lys. Strategien er å splitte mengden av noder i omtrent like store delmengder, og beregne regulariteten av hvert par. Hvis vi kan gjøre dette på en slik måte at alle par har stor grad av regularitet, så ville det gi oss et nyttig verktøy for å forstå grafens natur, selv om kantmengden i grafen er lite tilgjengelig og tilsynelatende ikke har noe spesielt mønster. Szemerédis regularitetslemma gir oss presis det verktøyet vi trenger. Det sier at uansett hvor stor regularitet vi krever, kan vi alltid finne en oppdeling av nodene slik at nesten alle kantmengdene for par av delmengder er framstår tilstrekkelig slumpmessig, dvs. har den ønskede graden av regularitet.

Vi kan betrakte et spesialtilfelle av regularitetslemmaet, hvor grafen har følgende form: La $1,2,3,\dots,N$ og $0$ være noder og la $A$ være en delmengde av $\{1,2,3,\dots,N\}$. Anta at det ikke er noen kanter internt blant nodene $1,2,3,\dots,N$, og at vi har en kant mellom en node $m$ og $0$ hvis og bare hvis $m$ er i $A$. En disjunkt oppdeling av mengden av noder vil bestå av en mengde som inneholder $0$, og resten vil være delmengder av $\{1,2,3,\dots, N\}$. For enkelthets skyld kaster vi ut alle nodene bortsett fra $0$ fra delmengden som inneholder $0$. Dermed er delmengdene enten like store delmengder av $\{1,2,3,\dots,N\}$, eller $\{0\}$. For to delmengder av $\{1,2,3,\dots,N\}$ er tettheten av paret $0$, siden det ikke er noen interne kanter i mengden $\{1,2,3,\dots,N\}$, mens tettheten av en delmengde og $\{0\}$ vil være brøkdelen $\#(A\cap\{1,2,3,\dots,N\})/\#A$. Regularitetslemmaet sier i dette tilfellet at for en vilkårlig delmengde $A$ av $\{1,2,3,\dots,N\}$ så kan vi splitte $\{1,2,3,\dots,N\}$ i (omtrent) like store delintervaller slik at for ethvert delintervall $I$ vil delmengden $A\cap I$ framstå som slumpmessig, dvs. for ethvert delintervall $J$ i $I$ vil tettheten av $A$ i $J$ være omtrent den samme som tettheten av $A$ i $I$.




E. Szemerédi; *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*.
Acta Arithmetica, 27: pp.199–245, 1975.

E. Szemerédi; *Regular partitions of graphs*.
In Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes (Col loq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), pp. 399–401, Paris, 1978. Colloques Internationaux CNRS n. 260.