Abelprisvinner 2012
Endre Szemerédi

Gleden og det mystiske ved de naturlige tallene

Ved første øyekast virker de naturlige tallene nokså enkle. Telling, 1,2,3,…, addisjon 3+2=5, og til og med multiplikasjon 3 x 4 = 12, er oppgaver som beherskes av barn i tidlig skolealder. Samtidig rommer de naturlige tallene noen av de mest berømte gåtene innen matematikk. Vi skal diskutere denne tosidigheten i to ulike perspektiver, addisjon versus multiplikasjon og struktur versus tilfeldigheter.

Addisjon vs. multiplikasjon

Selv om multiplikasjon ofte defineres som repetert addisjon, slik som i 5+5+5+5+5+5=6x5, så er det ikke slik at de to operasjonene addisjon og multiplikasjon i alle sammenhenger respekterer hverandres strukturelle egenskaper. Fermat påstår i sitt berømte siste teorem, bevist av Andrew Wiles på slutten av 1900-tallet, etter 350 år med sammenhengende undring, at summen av to potenser (av grad 3 eller høyere) av naturlige tall selv ikke kan være en potens av et naturlig tall av samme grad. Addisjonen forstyrrer den multiplikative strukturen, og vi mister oversikten.

Goldbachs formodning, opprinnelig formulert i 1742, sier at ethvert partall større enn 2 kan skrives som summen av to primtall. Det å være et primtall er en rent multiplikativ egenskap ved et naturlig tall. Når vi legger sammen to primtall blander vi multiplikative og additive egenskaper på en slik måte at resultatet hverken har den ene eller den andre strukturen. Ingen har enda vært i stand til å bevise Goldbachs påstand.

Struktur vs. tilfeldigheter

Konflikten mellom struktur og tilfeldigheter bringer oss til et annet mysterium ved de naturlige tallene. Dersom vi betrakter en tilfeldig valgt mengde, bestående av ett eller flere tall, er det da mulig at denne mengden tilfredsstiller noen på forhånd formulerte strukturelle egenskaper? Szemerédis teorem er en god illustrasjon på en slik problemstilling. Den forhåndsannonserte egenskapen er i dette tilfelle eksistens av aritmetiske progresjoner (se egen artikkel for en utfyllende beskrivelse), og spørsmålet dreier seg om hvor stor den tilfeldig utvalgte mengden må være for at vi skal være sikker på at den inneholder aritmetiske progresjoner av vilkårlig lengde. Enhver strukturell egenskap ved et naturlig tall er bygget opp fra mindre tall, på veien til 11 vil du alltid passere 10, og den multiplikative karakteriseringen av et tall er gitt ved primtallsdekomposisjonene av tallet. Dersom vi plukker ut en tilfeldig samling av naturlige tall, endelig eller uendelig, er det derfor svært komplisert å spore tilbake til de strukturelle egenskapene ved tallene.

Mange elementære tallteoretiske problemer kan klassifiserers langs addisjon/multiplikasjons-aksen eller som et struktur vs. tilfeldigheter-problem. Vi har nevnt Fermats siste teorem, Goldbachs formodning og Szemerédis teorem. Andre problemer, slik som det uløste mysteriet med tvillingprimtall, kan også bli sett på i dette perspektivet. Tvillingprimtall er par av primtall av differanse 2, slik som 5 og 7, eller 41 og 43. Spørsmålet er om det finnes uendelig mange slike par. Igjen, ved å plukke et primtall forholder vi oss til den multiplikative strukturen til de naturlige tallene, å kreve at differansen mellom dem er 2 har å gjøre med den additive strukturen. Vi blander de to operasjonene, - og mister grepet.