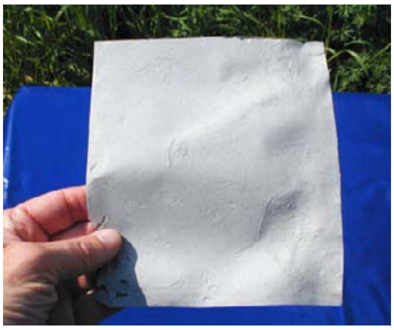
Abelprisen 2009

Differensialgeometri

Differensialgeometri er studiet av glatte, krumme objekter. I denne populariserte framstillingen skal vi forsøke å belyse feltet.

Vi tar for oss et papirark. Det er flatt, bøyelig, men ikke tøyelig. Når det ligger flatt på bordet inneholder det rette linjer i alle retninger. Vi kan rulle opp papirarket uten å brette eller krølle, eller langt mindre rive det i stykker. Det går fint å forme en sylinder og en kjegle. I begge tilfeller vil det i alle punkter fortsatt være én retning hvor arket inneholder en rett linje. På sett og vis klarer vi ikke å ødelegge en slags innebygd flathet i papirarket. Vi sier at arket har **krumning null.**



Toppsjefen i Exxon har som sin visjon at selskapets bensinstasjoner skal være jevnt fordelt ut over hele det amerikanske kontinentet. Han tegner sirkler på kartet med sentrum i hovedkvarteret og med radius 100km, 200km, 300km osv. Så ber han sine ansatte om å telle bensinstasjonene innenfor hver sirkel. Arealet er proporsjonalt med kvadratet av radiusen, så antallet stasjoner skulle dermed vokse som 1,4,9,16, ... Etter noe tid er resultatene fra tellingen klare. Tilsynelatende er bensinstasjonstettheten størst i nærheten av hovedkvarteret og avtar jo lenger man kommer unna. Men de ansatte har funnet noe annet interessant; at hvis de gjør samme type telling med utgangspunkt i et helt annet sentrum, ja, så får de samme type resultat. Det er alltid flest satsjoner nærmest centrum, og færre lenger unna i forhold til den forventede fordelingen 1,4,9,...

Dette er faktisk ikke noe paradoks, det forteller kun at den kuleformede jordoverflaten har **positiv krumning.**

Så tar vi for oss en arm, en ganske vanlig menneskearm. Kuleleddet i skulderen gir oss en viss rotasjonsfrihet og de to knoklene i underarmen, *radius* og *ulna*, gir håndleddet nok frihet til at vi kan vri om et dørhåndtak. Vi skal holde oss til rotasjoner i skulderen og holde håndleddet i ro. Prøv å gjøre følgende bevegelse: Hold armen rett foran deg, hånden åpen, fingrene samlet og håndflaten pekende nedover. Mens du holder alt i samme stilling, løfter du armen ved hjelp av skulderleddet til armen peker rett opp, omtrent som hos skolebarn som har noe å si. Roter skulderen stivt videre til armen peker rett ut, som om du skulle vært korsfestet bare på den ene siden. Bruk så til slutt skulderleddet til å rotere armen tilbake til utgangspunktet. Håndflaten peker nå til siden i stedet for nedover, slik den gjorde i da vi startet. Du har altså rotert håndleddet ved å flytte armen langs en sfærisk trekant, uten å bruke rotasjonsfriheten i håndleddet. Gjør det nå, ved å vri håndleddet til håndflaten igjen peker nedover. Kjenn at musklene i underarmen gjør en jobb som de slapp å gjøre ved den første bevegelsen.

Siden du har flyttet hånda langs en trekant på en kuleflate, med armen som radius, så har krumningen til kula vridd håndleddet 90 grader, uten at du merket det. Hvis du hadde gjort det samme langs en flate uten krumning ville hånden med nødvendighet ha kommet tilbake til utgangspunktet med samme vridning som da den startet. Dette er

et eksempel på **parallell transport** langs en sfærisk trekant.
Kanskje man blir litt sulten av slikt hardt fysisk arbeid? Da kan du tenke på en smultring. Glatt og fin og med hull i midten. Før vi spiser opp herligheten skal vi se litt på krumningsstrukturen på overflaten til smultringen. På den innerste delen, dvs. nær hullet, har vi én type krumning. I dette området krummer smultringen to forskjellige veier, som i en sadel, opp i en retning og ned i retningen på tvers. På den ytre delen krummer smultringflaten samme vei i alle retninger. I det første tilfellet sier vi at krumningen er negativ, mens i det andre er den positiv, omtrent som at minus og pluss gir minus og pluss og pluss gir pluss. Summerer vi opp over alle punktene på smultringen vil summen faktisk bli 0, og det samme vil vi observere for enhver lukket flate med ett hull.

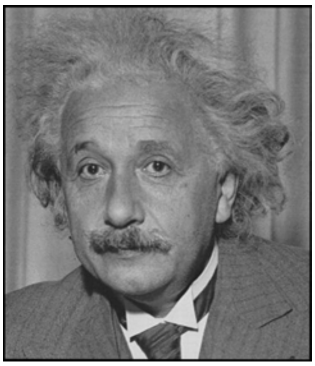
Vi kan gjøre det samme for en bolle eller et kuleskall. I det tilfellet summeres krumningen opp til 4π. Det generelle resultatet, kalt **Gauss-Bonnets teorem** sier at den totale krumningen av en glatt lukket flate kun avhenger av antallet hull, slik at hvert hull svarer til et fratrekk på 4π for total krumning.

Differensialgeometri er den grenen av geometri som behandler glatte, gjerne krummede objekter. Differensialgeometri studerer lokale egenskaper, slik som å måle avstand og krumning, eller globale egenskaper som orienterbarhet. En første tilnærming til å forstå hva differensialgeometri er er å forstå hva det ikke er. Differensialgeometri skiller seg fra Euklidsk geometri siden Euklidsk geometri som regel dreier seg om objekter som er rette og uten krumning, slik som linjer, plan, trekanter og i verste fall kan de være buet på helt spesielle måter, slik som sirkler. Differensialgeometre betrakter Euklidsk geometri som et spesialtilfelle der krumningen er konstant lik null. For dem forekommer alt det interessante der krumningen er forskjellig fra null.
Rent historisk kan vi dele differensialgeometri i to deler, klasisk og moderne, med demarkasjonslinjen trukket tvers igjennom Berhard Riemanns tiltredelsesforelesning i 1854 i Göttingen. Denne forelesningen la grunnlaget for moderne teori og skulle komme til å inspirere geometere i mange tiår.
Klassisk differensialgeometri begynner med et studium av krumme flater i rommet, slik som kuleskall, kjegler, sylindere eller ellipsoider. Et kjernebegrep som alltid er til stede i differensialgeometri er begrepet krumning. Den første som på alvor belyste dette problemet var Leonhard Euler (1707-1783), en mann som har satt spor etters eg på bort i mot samtlige områder av matematikk som fantes på syttenhundretallet. Euler har æren for mange av de tidlige oppdagelsene innen differensialgeometri, men hans inflytelse overgås av etterfølgeren Carl Friedrich Gausss (1777 - 1855) Hans grunnleggende avhandling *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Generelle undersøkelser av krumme flater) fra 1827 skapte virkelig bølger på feltet. Gauss' avhandling gir oss en nesten moderne definisjon av krumme flater, i tillegg til definisjoner og presise algoritmer for å beregne det som i dag har fått navnet Gauss-krum-

ningen til en flate. Han definerer også første og andre fundamentalform for en flate og betydningen ved den første har overlevd til moderne differensialgeometri i form av Riemannske metrikker i Riemannsk geometri.
Ved å bruke disse begrepene sammen med den intrinsike egenskapen ved første fundamentalform, at den kun avhenger av flaten selv, og ikke av hvordan flaten er plassert i et omliggende Euklidsk rom, viser Gaus sitt ***theorema egregium*** (oppsiktsvekkende teorem). Gauss presenterer teoremet på denne måten:

Teorem (Gauss, 1828) *Derom en flate er embedded i en vilkårlig annen flate vil verdien av krumningen i ethvert punkt forbli uendret.*

Teoremet er oppsiktsvekkende fordi definisjonen av Gauss-krumning baserer seg på plasseringen av flaten i rommet. Så det er derfor overraskende at sluttresultatet ikke avhenger av embeddingen.
Med et helt annet utgangspunkt og i en annen tid, forsto fysikeren Albert Einstein (1870-1955) at han ville trenge en ny type geometri hvis han skulle kunne generalisere sin relativitetsteori.



I det øyeblikket fysikere begynner å interessere seg for en matematisk teori, vil utviklingen av teorien få et nytt og andreledes løft.
Inntog av fysikere på et felt beriker og kompliserer fagområdet, med matematikere som noen ganger arbeider parallellt med fysikerne, noen ganger på tvers av fysikernes tradisjoner.
Ikke-definite metrikker, slik som Minkowski-metrikken ble populære etter at Einstein kom på banen. Men fortsatt sto den klassiske og analytiske mekanikken og deres studier av mekaniske systemer sterkt innen differensialgeometi, og ble også fødselshjelperen til symplektisk geometri.
Et annet bidrag til denne strømmen av teorier kom litt tidligere på attenhundretallet fra nordmannen Sophus Lie (1842-1899). Han bestemte seg for å ferdigstille ideene til Felix Klein (1849-1925) og hans Erlangerprogram og benytte kontinuerlige deriverbare grupper til å fortelle oss noe om symmetriene til mangfoldighetene. Disse transformasjonsgruppene er i seg selv mangfoldigheter og Lie-grupper er i dag et eget forskningsfelt.

Men hva er Riemannsk geometri? Euklidks geometri er sudiet av flate rom. Mellom ethvert par av punkter finnes det et entydig linjestykke som gir den korteste veien mellom de to punktene. Linjestykkene kan utvides til hele linjer. Linjer er uendlig lange i begge retninger og for ethvert par av punkter på linja, så er linjestykket mellompunktene definert som en korteste avstanden mellom de to punktene.
Videre, dersom man har gitt en linje og et punkt utenfor linja, så finnes presis én annen linje som er parallell til den første og som går gjennom punktet.
Disse ideene kan vi beskrive ved å tegne figurer på et flatt papiark. Fra lovene for Euklids geometri kan vi utlede vikige resultater som Pythagors setning og alle de trigonometriske formelene vi lærer på skolen, slik som cosinus-loven.
Dersom vi i steden for å ha et flatt papirark, har et krumt papir, som et kuleskall, vil situasjonen bli en litt annen. Den korteste veien mellom et par av punkter på en slik flate kalles en minimal geo-

Abelprisen 2009

desisk kurve. Denne kurven kan vi finne ved å strekke en gummistrikk mellom punktene. Vi merker oss det at noen ganger finnes flere enn en minimal geodesisk kurve mellom to punkter. F.eks. er det mange geodesiske kurver mellom nord- og sydpolen på et kuleskall.
Riemannska geometere studerer også høyere dimensjonale rom. Universet kan beskrives som et tre-dimensjonalt rom. Nær jorda ser det omtrent ut som et tre-dimensjonalt euklidsk rom. I nærheten av tunge stjerner eller sorte hull, derimot, ser rommet krumt ut. Det finnes punkter i rommet hvor det er mer enn én minimal geodesisk kurve mellom dem. Ved hjelp av Hubbleteleskopet har astronomer oppdaget slike punkter, og tatt bilde av dem! Dette fenomenet kalles gravitasjonal brytning.

Graden av krumning på universet kan beregnes ved å bruke teoremer fra Riemannsk geometri og målinger utført av astronomer. Fysikerne tror at universets krumning er relatert til gravitasjonsfeltet rundt en stjerne i henhold til Einsteins likning Så ved å bruke resultater fra Riemannsk geometri kan man anslå massen til sorte hull som forårsaker gravitasjonal brytning.