

Abelprisen 2009

Populærbeskrivelser av Riemannsk og symplektisk geometri



Ordet geometri har sin opprinnelse i gammelgresk; γεωμετρία; geo = jord, metria = mål. Det er den delen av matematikk som tar for seg problemstillinger rundt størrelse, form, relativ posisjon av figurer og om egenskaper ved rommet. Geometri er blant verdens eldste vitenskaper. De grunnleggende geometriske objektene er punkter, linjer og plan. Allerede Euklid i det tredje århundre f.Kr. beskrev plangeometri slik den oppleves på et flatt papirark. I det tilfellet har vi en intuitiv forståelse av hva lengde og areal er. Om vi studerer krumme flater slik som et område i naturen eller overflaten på menneskekroppen er det ikke lenger så lett å måle lengder eller areal.

Vi betrakter følgende problem. Tenk deg at du eier en fjellgård på Vestlandet og at du planlegger å så gress på et jorde. På kartet ser jordet ut som et pent rektangel og det å beregne arealet for å kunne regne ut hvor mye gressfrø du vil trenge, virker til å være en enkel oppgave. Problemet er at jordet ditt er langt fra å være flatt. Det ser mer



ut som den alt for store pelsen til en hvalp eller som havoverflaten like etter en langvarig storm. En liten firkant på kartet svarer til et (mye) større areal i virkeligheten, Forholdet mellom arealene på kartet og i virkeligheten er uttrykt ved det som kalles en *2-form* på flaten. Dersom vi kjenner verdien av 2-formen i alle punkter på flaten kan vi i prinsippet (om enn ikke i praksis) beregne det faktiske arealet av jordet. En flate utstyrt med en 2-form kalles en *symplektisk flate* og teorien for slike objekter kalles *symplektisk geometri*.

Du har også en annen problemstilling på Vestlandsgården din. Gjennom sommersesongen går sauene dine fritt oppe på fjellet. Som den ansvar-

lige gjeteren du er, vandrer du stadig rundt i fjellet for å passe på dyra. Selv om dette fjellområdet er ganske flatt er det ikke opplagt at den raskeste veien mellom to punkter er den rette linje. Noen steder er grunnen tørr, noen steder er det fast fjell og andre steder er det våt myr. Det er mye tyngre å gå i myra enn på steinene. Nå gransker vi hvert eneste punkt i området. Til hver retning i hvert punkt tilordner vi et tall. Verdien uttrykker hvor tungt det er å gå i akkurat den retningen i det punktet. I myra blir verdiene høye, mens de blir lavere på tørr grunn. Verdiene i forskjellige retninger i ett og samme punkt reflekterer variasjoner i grunnforholdene i ulike retninger i punktet. Når vi har gjort dette trekker vi opp den ruta vi skal gå. Kreftene vi bruker på å gå den valgte ruta kan vi nå finne ved å “addere” alle verdiene i de aktuelle retningene i hvert eneste punkt vi går innom. Denne funksjonen kalles en *metrikk* på flaten og en flate utstyrt med en metrikk kalles en *metrisk flate*. Teorien for metriske flater og mer generelle metriske mangfoldigheter kalles *Riemannsk geometri*.

