XIII.

RECHERCHE DE LA QUANTITÉ QUI SATISFAIT A LA FOIS A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONNÉES.

Annales de Mathématiques pures et appliquées rédigées par M. *J. D. Gergonne*, t. XVII, Paris 1827.

Lorsqu'une quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant quelles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficiens des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

$$(1) \qquad \varphi y = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0,$$

$$(2) \qquad \psi y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

les deux équations proposées, la première du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré.

Désignons les n racines de (2) par $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$; en les substituant tour à tour dans (1), on aura les n fonctions

$$(3) \qquad \varphi y, \ \varphi y_1, \ \varphi y_2, \ \ldots \ \varphi y_{n-1}.$$

Soient

$$(4)\quad \begin{cases} R = \varphi y_1 . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_1 = \varphi y . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_2 = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_3 \ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-1}, \\ R_{n-1} = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-2}. \end{cases}$$

Cela posé, soit fy la fonction rationnelle de y dont on veut déterminer la valeur, et désignons par θy une autre fonction rationnelle quelconque de y. On aura l'équation identique

$$(5)\qquad fy . \theta y . R = fy . \theta y . R.$$

Maintenant, ayant $\varphi y = 0$, on aura

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ R_3 = 0,\ \ldots\ R_{n-1} = 0,$$

et, par suite,

$$tR + t_1 R_1 + t_2 R_2 + t_3 R_3 + \cdots + t_{n-2} R_{n-2} + t_{n-1} R_{n-1} = tR,$$

où t, t_1, t_2, ... t_{n-2}, t_{n-1} sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t = \theta y,\ t_1 = \theta y_1,\ t_2 = \theta y_2,\ \ldots\ t_{n-1} = \theta y_{n-1},$$

et ensuite

$$t = fy . \theta y,\ t_1 = fy_1 . \theta y_1,\ t_2 = fy_2 . \theta y_2,\ \ldots\ t_{n-1} = fy_{n-1} . \theta y_{n-1},$$

on obtiendra les deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} \theta y . R = \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1}, \\ fy . \theta y . R = fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1}; \end{cases}$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$fy(\theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1})$$
$$= \theta y . fy . R + \theta y_1 . fy_1 . R_1 + \theta y_2 . fy_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . fy_{n-1} . R_{n-1};$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$(7)\quad \begin{cases} \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma\, \theta y . R, \\ fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma\, fy . \theta y . R, \end{cases}$$

deviendra

$$fy\,\Sigma\,\theta y\,.\,R = \Sigma\,fy\,.\,\theta y\,.\,R,$$

et de là

$$fy = \frac{\Sigma\,fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\Sigma\,\theta y\,.\,R}. \tag{8}$$

Maintenant il est clair que le numérateur et le dénominateur de cette valeur de fy sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines y, $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$; on peut donc en vertu des formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction fy.

La fonction rationnelle θy étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de fy. Pour cela, soit

$$fy = \frac{Fy}{\chi y},$$

où Fy et χy sont deux fonctions entières; on aura, en substituant,

$$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma\frac{Fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\chi(y)}}{\Sigma\,\theta y\,.\,R};$$

si donc on suppose $\theta y = \chi y$, on aura

$$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma\,Fy\,.\,R}{\Sigma\,\chi y\,.\,R}; \tag{9}$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficiens des équations proposées.

Si $\chi y = 1$, on aura, pour une fonction entière quelconque Fy,

$$Fy = \frac{\Sigma\,Fy\,.\,R}{\Sigma R}; \tag{10}$$

ou bien

$$Fy = \frac{Fy\,.\,R + Fy_1\,.\,R_1 + Fy_2\,.\,R_2 + \cdots + Fy_{n-1}\,.\,R_{n-1}}{R + R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de Fy de la manière suivante:

Désignons par $\psi' y$ la dérivée de ψy, par rapport à y, et faisons

$$\theta y = \frac{1}{\psi' y},$$

l'équation (8) donnera

(11) $$Fy = \frac{\Sigma \frac{Fy R}{\psi' y}}{\Sigma \frac{R}{\psi' y}}.$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer R par une fonction entière de y. En effet, si l'on fait

$$(z-y_1)(z-y_2)\cdots(z-y_{n-1}) = z^{n-1} + v_{n-2}z^{n-2} + v_{n-3}z^{n-3} + \cdots + v_0 = 0,$$

on peut transformer R, qui est une fonction entière et symétrique de $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, en fonction entière des coefficiens $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \cdots + v_{n-2}z^{n-2} + z^{n-1})(z-y) \\ = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{n-1}z^{n-1} + z^n = z^n + (v_{n-2} - y)z^{n-1} \\ + (v_{n-3} - y v_{n-2})z^{n-2} + (v_{n-4} - y v_{n-3})z^{n-3} + \cdots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= q_{n-1} + y, \\ v_{n-3} &= q_{n-2} + y \,.\, v_{n-2}, \\ v_{n-4} &= q_{n-3} + y \,.\, v_{n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d'où il suit que $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$ sont des fonctions entières de y; la fonction R l'est donc aussi; elle est donc de la forme

(12) $$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_\mu y^\mu,$$

où il est évident que $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ seront des fonctions *entières* des coefficiens des équations (1) et (2).

La fonction R sera d'un degré supérieur à $n-1$; mais il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de y supérieures à la $(n-1)^{ième}$, et de cette manière mettre R sous la forme

$$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y^{n-1},$$

où $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ sont toujours des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

En multipliant R par la fonction entière Fy on aura la fonction $Fy.R$, qui est de même une fonction entière de y. On peut donc la mettre sous la même forme que R, c'est-à-dire qu'on peut poser

(13) $$Fy.R = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1},$$

$t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ étant encore des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2 \ldots p_{m-1}$, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

Dès que R sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$\begin{aligned} R_1 &= \varrho_0 + \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_1^2 + \varrho_3 y_1^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_1^{n-1}, \\ R_2 &= \varrho_0 + \varrho_1 y_2 + \varrho_2 y_2^2 + \varrho_3 y_2^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_2^{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{n-1} &= \varrho_0 + \varrho_1 y_{n-1} + \varrho_2 y_{n-1}^2 + \varrho_3 y_{n-1}^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

On aura de même

$$\begin{aligned} Fy_1 . R_1 &= t_0 + t_1 y_1 + t_2 y_1^2 + t_3 y_1^3 + \cdots + t_{n-1} y_1^{n-1}, \\ Fy_2 . R_2 &= t_0 + t_1 y_2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_2^3 + \cdots + t_{n-1} y_2^{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Fy_{n-1} . R_{n-1} &= t_0 + t_1 y_{n-1} + t_2 y_{n-1}^2 + t_3 y_{n-1}^3 + \cdots + t_{n-1} y_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Maintenant je dis qu'on aura

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}}.$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \frac{R}{\psi' y} + \frac{R_1}{\psi' y_1} + \frac{R_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{\psi' y_{n-1}};$$

donc, en substituant les valeurs de $R, R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{R}{\psi' y} = \quad & \varrho_0 \left(\frac{1}{\psi' y} + \frac{1}{\psi' y_1} + \frac{1}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{1}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \varrho_1 \left(\frac{y}{\psi' y} + \frac{y_1}{\psi' y_1} + \frac{y_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \varrho_2 \left(\frac{y^2}{\psi' y} + \frac{y_1^2}{\psi' y_1} + \frac{y_2^2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^2}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \varrho_{n-1} \left(\frac{y^{n-1}}{\psi' y} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi' y_1} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Or, $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, étant les racines de l'équation (2) on a

$$\begin{aligned} \psi' y &= (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \cdots (y - y_{n-1}), \\ \psi' y_1 &= (y_1 - y)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_1 - y_{n-1}), \\ \psi' y_2 &= (y_2 - y)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \cdots (y_2 - y_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\psi' y_{n-1} = (y_{n-1} - y)(y_{n-1} - y_1)(y_{n-1} - y_2) \cdots (y_{n-1} - y_{n-2});$$

donc, d'après une formule connue, les coefficiens de $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$, dans l'expression de $\Sigma \frac{R}{\psi' y}$, s'évanouiront tous, excepté celui de ϱ_{n-1}, qui se réduira à l'unité; on aura donc

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \varrho_{n-1}.$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\Sigma \frac{R . Fy}{\psi' y} = t_{n-1};$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}},$$

ou bien, en écrivant t et ϱ, au lieu de t_{n-1} et ϱ_{n-1},

$$(14) \qquad Fy = \frac{t}{\varrho}.$$

Soit maintenant $F'y$ une autre fonction entière de y; en supposant

$$(15) \qquad F'y . R = t' y^{n-1} + t'_{n-2} y^{n-2} + t'_{n-3} y^{n-3} + \cdots + t_1' y + t_0',$$

$t', t'_{n-2}, t'_{n-3}, \ldots t'_0$ étant des fonctions entières des quantités $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$, on aura

$$(16) \qquad F'y = \frac{t'}{\varrho};$$

d'où, en comparant (14) à (16),

$$(17) \qquad \frac{Fy}{F'y} = \frac{t}{t'}.$$

Ainsi on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $\frac{Fy}{F'y}$ par le développement des deux fonctions

$$Fy . R \text{ et } F'y . R.$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de y. Alors on a

$$y = \frac{t}{\varrho}$$

où

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots \text{ et } Ry = t y^{n-1} + t' y^{n-2} + \cdots$$

On peut exprimer t en ϱ et ϱ'. En effet en substituant la valeur de R, il viendra

$$Ry = \varrho y^n + \varrho' y^{n-1} + \cdots;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} - \cdots;$$

donc, en substituant

$$Ry = (\varrho' - \varrho q_{n-1})y^{n-1} + \cdots.$$

Dans le développement de Ry, le coefficient de y^{n-1} est donc

$$\varrho' - \varrho q_{n-1} = t;$$

donc

$$y = \frac{\varrho' - \varrho q_{n-1}}{\varrho},$$

ou bien

$$y = -q_{n-1} + \frac{\varrho'}{\varrho}. \tag{18}$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficiens de y^{n-1} et y^{n-2} dans le développement de

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots = \varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \cdot \varphi y_3 \cdots \varphi y_{n-1}.$$

Paris, le 2 novembre 1826