

I.

Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendentes x et y , telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x , et y .

Si l'on désigne p. ex. les fonctions $x + y$ et xy par $f(x, y)$, on a pour la première $f(z, f(x, y)) = z + f(x, y) = z + x + y$ et pour la seconde $f(z, f(x, y)) = z \cdot f(x, y) = zxy$. La fonction $f(x, y)$ a donc dans l'un et l'autre cas la propriété remarquable que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique des trois variables indépendentes z, x et y . Je vais chercher dans ce mémoire la forme générale des fonctions, qui jouissent de cette propriété.

L'équation fondamentale est celle-ci:

1. $f(z, f(x, y)) =$ une fonction symétrique de x, y et z .

Une fonction symétrique reste la même lorsqu'on y échange entre elles d'une manière quelconque les quantités variables dont elle dépend. On a donc les équations suivantes:

2.
$$\begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(z, f(y, x)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(x, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

La première équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$f(x, y) = f(y, x)$$

c'est-à-dire $f(x, y)$ doit être une fonction symétrique de x et y . Par cette raison les équations (2.) se réduisent aux deux suivantes:

3.
$$\begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)) \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

Soit pour abrégier $f(x, y) = r$; $f(y, z) = v$; $f(z, x) = s$; on aura

4.
$$f(z, r) = f(x, v) = f(y, s)$$

En différentiant successivement par rapport à x, y, z , on aura

$$f'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) = f'(s) \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right),$$

$$f'(v) \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right) = f'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dy}\right),$$

$$f'(s) \cdot \left(\frac{ds}{dz}\right) = f'(v) \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Si l'on multiplie ces équations membre par membre et divise les produits par $f'(r) \cdot f'(v) \cdot f'(s)$, on obtiendra cette équation

$$5. \quad \left(\frac{dr}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right) \cdot \left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{dr}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right) \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right)$$

ou bien

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) \cdot \frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)} = \left(\frac{dr}{dy}\right) \cdot \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)}.$$

Si l'on fait z invariable, $\left(\frac{dv}{dy}\right) : \left(\frac{dv}{dz}\right)$ se réduira à une fonction de y seule.

Soit $\varphi(y)$ cette fonction, on aura donc en même temps $\left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{ds}{dz}\right) = \varphi(x)$; car s est la même fonction de z et x que v de z et y .

Donc

$$6. \quad \left(\frac{dr}{dx}\right) \varphi y = \left(\frac{dr}{dy}\right) \cdot \varphi x.$$

On en tirera, en intégrant, la valeur générale de r ,

$$r = \psi (\int \varphi x \cdot dx + \int \varphi y \cdot dy)$$

ψ étant une fonction arbitraire. En écrivant pour abrégier φx pour $\int \varphi x dx$ et φy pour $\int \varphi y dy$, on aura

$$7. \quad r = \psi (\varphi x + \varphi y), \text{ ou } f(x, y) = \psi (\varphi x + \varphi y).$$

Voilà donc la forme, que doit avoir la fonction cherchée. Mais elle ne peut pas dans toute sa généralité satisfaire à l'équation (4.). En effet l'équation (5.), qui donne la forme de la fonction $f(x, y)$, est beaucoup plus générale que l'équation (4.), à laquelle elle doit satisfaire. Il s'agit donc des restrictions auxquelles l'équation générale est assujettie.

On a $f(z, r) = \psi (\varphi z + \varphi r)$.

Or $r = \psi (\varphi x + \varphi y)$, donc $f(z, r) = \psi (\varphi z + \varphi \psi (\varphi x + \varphi y))$.

Cette expression doit être symétrique par rapport à x, y et z . Donc $\varphi z + \varphi \psi (\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi \psi (\varphi y + \varphi z)$. Soit $\varphi z = 0$ et $\varphi y = 0$, on aura

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

donc en faisant $\varphi x = p$,

$$\varphi\psi(p) = p + c.$$

En désignant donc par φ_1 la fonction inverse de celle exprimée par φ de sorte que

$$\varphi\varphi_1(x) = x,$$

on trouvera

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c).$$

La forme générale de la fonction cherchée $f(x, y)$ sera donc

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

et cette fonction a en effet la propriété demandée.

On tire de là

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y$$

ou en mettant $\psi x - c$ à la place de φx et par conséquent $\psi y - c$ à la place de φy et $\psi(f(x, y)) - c$ à la place de $\varphi(f(x, y))$,

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Cela donne le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction $f(x, y)$ de deux quantités variables indépendentes x et y a la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de x, y et z , il y aura toujours une fonction ψ pour laquelle on a

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

La fonction $f(x, y)$ étant donnée on trouvera aisément la fonction ψx . En effet on aura en différenciant l'équation ci-dessus suivant x et suivant y , et faisant pour abrégier $f(x, y) = r$:

$$\psi'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) = \psi'x,$$

$$\psi'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dy}\right) = \psi'y,$$

donc en éliminant $\psi'(r)$,

$$\left(\frac{dr}{dy}\right) \psi'(x) = \left(\frac{dr}{dx}\right) \psi'y$$

d'où

$$\psi'x = \psi'y \cdot \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)}.$$

Multipliant donc par dx et intégrant, on aura

$$\psi x = \psi' y \cdot \int \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)} dx.$$

Soit par exemple

$$r = f(x, y) = xy,$$

il se trouvera donc une fonction ψ , pour laquelle

$$\psi(xy) = \psi x + \psi y.$$

Or $r = xy$, donc $\frac{dr}{dx} = y$, $\frac{dr}{dy} = x$,

donc $\psi x = \psi' y \int \frac{y}{x} dx = y \psi' y \log(cx)$,

ou puisque la quantité y est supposée constante,

$$\psi x = a \log(cx).$$

Cela donne $\psi y = a \log(cy)$, $\psi(xy) = a \log(cxy)$;

on doit donc avoir: $a \log(cxy) = a \log(cx) + a \log(cy)$;

ce qui a effectivement lieu pour $c = 1$.

Par un procédé semblable au précédent on peut aussi trouver des fonctions de deux quantités variables, qui satisfont à des équations données à trois variables. Savoir on peut par des différentiations successives par rapport aux différentes quantités variables trouver des équations, desquelles on peut éliminer autant de fonctions inconnues qu'on voudra, jusqu'à ce qu'on est parvenu à une équation qui ne contient qu'une seule fonction inconnue. Cette équation sera une équation différentielle partielle à deux variables indépendentes. L'expression, que donne cette équation, contiendra donc un certain nombre de fonctions arbitraires d'une seule quantité variable. Lorsque les fonctions inconnues trouvées de cette manière seront substituées dans l'équation donnée, on trouvera une équation entre plusieurs fonctions d'une seule quantité variable. Pour trouver ces fonctions on doit différentier de nouveau et on parviendra par là à des équations différentielles ordinaires, desquelles on trouvera les fonctions, qui ne sont plus arbitraires. De cette manière on trouvera la forme de toutes les fonctions inconnues, à moins qu'il ne soit impossible de satisfaire à l'équation donnée.

