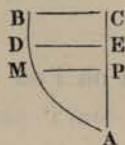


IV.

Résolution d'un problème mécanique.

Soit $BDMA$ une courbe quelconque. La ligne BC soit horizontale et CA verticale. Supposons qu'un point mis en mouvement par l'action de la gravité se meuve sur cette courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A , et soit a la hauteur EA . La quantité τ sera donc une certaine fonction de a qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment à l'aide d'une intégrale définie on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a .



Soit $AM = s$, $AP = x$, et t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM .

D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{(a-x)}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{(a-x)}}$. Il suit de là, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$;

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}} = +\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}},$$

\int_α^β désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi(a)$$

la fonction donnée, et on aura

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}},$$

équation par laquelle s doit être trouvé en x . Au lieu de cette équation nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons s en x .

Désignons par $I(\alpha)$ la fonction

$$I(\alpha) = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1}$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \cdot dy = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

où α et β doivent être supérieurs à zéro.

Soit $\beta = 1 - n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1} dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire en faisant $z = ay$

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a = 0$ jusqu'à $a = x$, on trouvera:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \cdot \int_0^x \frac{a^{\alpha-n} \cdot da}{(x-a)^{1-n}}$$

En faisant $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n} \cdot da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n} dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n+1) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = I(n) \cdot I(1-n) \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot x^\alpha.$$

Or d'après une propriété connue de la fonction I , on a

$$I(\alpha+1) = \alpha I(\alpha);$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} \cdot dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot I(n) \cdot I(1-n).$$

En multipliant par $\alpha \cdot \varphi(\alpha) \cdot d\alpha$, et intégrant par rapport à α , on trouve:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{(\int \varphi(\alpha) \cdot \alpha z^{\alpha-1} d\alpha) dz}{(a-z)^n} = I(n) \cdot I(1-n) \int \varphi(\alpha) \cdot x^\alpha \cdot d\alpha.$$

$$\text{Soit} \quad \int \varphi(\alpha) \cdot x^\alpha d\alpha = f(x),$$

on tire de là en différenciant

$$f\varphi(\alpha) \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} d\alpha = f'(x),$$

donc

$$\int \varphi(\alpha) \cdot \alpha \cdot z^{\alpha-1} d\alpha = f'(z);$$

par conséquent:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{f'(z) \cdot dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) \cdot f(x),$$

ou, puisque

$$\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

$$1. \quad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{f'(z) dz}{(a-z)^n}.$$

A l'aide de cette équation il sera facile de tirer la valeur de s de l'équation

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\frac{\sin n\pi}{\pi} \cdot \frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(a) \cdot da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(a) \cdot da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n = \frac{1}{2}$, on obtiendra

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(a) \cdot da}{\sqrt{x-a}}.$$

Cette équation donne l'arc s par l'abscisse x , et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi(a) = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \dots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma(\alpha a^{\mu}),$$

et la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \cdot \Sigma(\alpha a^{\mu}) = \frac{1}{\pi} \Sigma \left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} \right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu + \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu + 1) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \frac{3}{2})}$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \sum \frac{\alpha \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})} x^{\mu_1} + \dots + \alpha_m \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})} \right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m=0$, $\mu_0=0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \cdot \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloïde.

II. Soit

φa depuis $a=0$ jusqu'à $a=a_0$, égal à $\varphi_0 a$

φa depuis $a=a_0$ jusqu'à $a=a_1$, égal à $\varphi_1 a$

φa depuis $a=a_1$ jusqu'à $a=a_2$, égal à $\varphi_2 a$

.....

φa depuis $a=a_{m-1}$ jusqu'à $a=a_m$, égal à $\varphi_m a$,

on aura

$$\pi s = \int_0^x \frac{\varphi_0 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=0, \text{ jusqu'à } x=a_0,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=a_0, \text{ jusqu'à } x=a_1$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=a_1, \text{ jusqu'à } x=a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \dots + \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a \cdot da}{\sqrt{(a-x)}},$$

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$ $\varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0(a_0) = \varphi_1(a_0), \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1), \varphi_2(a_2) = \varphi_3(a_2), \text{ etc.}$$

car la fonction φa doit nécessairement être continue.

