V.

Démonstration d'une expression de laquelle la formule binome est un cas particulier.

Cette expression est la suivante:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\,\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}\,\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$

$$\ldots + \frac{n}{1}\,\alpha\big(\alpha-(n-1)\beta\big)^{n-2}\big(x+(n-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

comme il faut. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire elle est vraie en général.

Soit $(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\,\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}\ldots\ldots$

$$\ldots + \frac{m}{1}\,\alpha\big(\alpha-(m-1)\beta\big)^{m-2}\big(x+(m-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouvera:

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\,\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\,\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}$$

$$\ldots + \frac{m+1}{1}\,\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + C;$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur soit

$$x = -(m+1)\beta,$$

et les deux dernières équations donneront:

$$(\alpha-(m+1)\beta)^m = (-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m - m^m\alpha\beta^{m-1} + \frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2}$$

$$-\frac{m(m-1)}{2.3}\,\alpha(\alpha-3\beta)^2(m-2)^{m-2}\beta^{m-3}\;\ldots\Big]$$

$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)\,m^m\alpha\beta^m$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}\dots\Big]+C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve:

$$C=\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^{m+1}+(m+1)\beta\,\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^m,$$

ou bien $\quad C=\alpha\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^m.$

Il suit de là que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome.

Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{2.3}x(x+3\beta)^{n-1}\dots$$

ou en divisant par x

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}(x+2\beta)^{n-1}-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{2.3}(x+3\beta)^{n-1}\dots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^{n-1}\Delta^n(x^{n-1})$$

en faisant la différence constante égale à β.