X.

Note sur le mémoire No. 4 du second tome du journal de M. Crelle, ayant pour titre "remarques sur les séries infinies et leur convergence."

On trouve pag. 34 dans ce mémoire le théorème suivant pour reconnaître si une série est convergente ou divergente:

"Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du n^{me} terme ou du "n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est zéro pour "$n=\infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une marque, que la "série est convergente; et réciproquement, la série ne peut pas être conver-"gente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n=\infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\dots\frac{1}{n\log n}$$

est divergente quoique $na_n=\frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n=\infty$. En effet les logarithmes hyperboliques dont il est question sont toujours moindre que leurs nombres moins 1, c'est-à-dire, on a toujours $\log(1+x)<x$. Si $x>1$ cela est évident. Si $x<1$ on a

$$\log(1+x)=x-x^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x)-x^4(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}x)\dots$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x)<x$, puisque $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}x$ sont tous positifs. En faisant $x=\frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \text{ ou bien } \log\frac{1+n}{n}<\frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n)<\frac{1}{n}+\log n<\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)\log n:$$

donc

$$\log\log(1+n)<\log\log n+\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x)<x$, on a $\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)<\frac{1}{n\log n}$, donc en vertu de l'expression précédente,

$$\log\log(1+n)<\log\log n+\frac{1}{n\log n}.$$

En faisant successivement $n=2, 3, 4, \ldots$ on trouve

$$\log\log 3<\log\log 2+\frac{1}{2\log 2},$$
$$\log\log 4<\log\log 3+\frac{1}{3\log 3},$$
$$\log\log 5<\log\log 4+\frac{1}{4\log 4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log\log(1+n)<\log\log n+\frac{1}{n\log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log\log(1+n)<\log\log 2+\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\cdots+\frac{1}{n\log n}.$$

Mais $\log\log(1+n)=\infty$ pour $n=\infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\cdots+\frac{1}{n\log n}$ est infiniment grande et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle, qu'une série quelconque $a_0+a_1+a_2+a_3\ldots+a_n$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente, si $\varphi n.a_n$ est zéro pour $n=\infty$ et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant.

Si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n\ldots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}+\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2}\cdots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}\cdots$$

le sera aussi. En effet, en remarquant que les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont positives, on a en vertu du théorème $\log(1+x)<x$, démontré ci-dessus,

$$\log(a_0+a_1+a_2\ldots+a_n)-\log(a_0+a_1+a_2\ldots a_{n-1})$$

c'est-à-dire

$$\log\left(1+\frac{a_n}{a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}}\right)<\frac{a_n}{a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}}$$

donc, en faisant successivement $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$\log(a_0+a_1)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2)-\log(a_0+a_1)<\frac{a_2}{a_0+a_1},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2+a_3)-\log(a_0+a_1+a_2)<\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log(a_0+a_1\ldots\ldots+a_n)-\log(a_0+a_1\ldots\ldots+a_{n-1})<\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0+a_1\ldots+a_n)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n$ est divergente, sa somme est infinie et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n telle, que la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n\ldots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n.a_n$ est zéro ou non pour $n=\infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}+\frac{1}{\varphi 4}\ldots+\frac{1}{\varphi n}\ldots$$

sera divergente et la série

$$\frac{1}{\varphi 2.\frac{1}{\varphi 1}}+\frac{1}{\varphi 3\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}\right)}+\frac{1}{\varphi 4\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\right)}\ldots$$
$$+\frac{1}{\varphi n\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\ldots\frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}\ldots$$

convergente; car dans la première on a $a_n\varphi n=1$ et dans la seconde $a_n\varphi n=0$ pour $n=\infty$. Or selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente, en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n=n$, les deux séries en question deviendront

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}\ldots$$

et
$$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3(1+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}\ldots+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n-1}\right)}\ldots$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.