XVIII.

Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

Si une intégrale algébrique $f(y,x)=0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}=a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

on aura toujours:

$$\int\frac{A+B.x^2}{1-\frac{x^2}{n^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int\frac{A^1+B^1y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}+k\log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation, que y et x; savoir $f(m,n)=0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a)\int(A+Bx^2)\,\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int(A'+B'y^2)\,\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}+v,$$

où v est une fonction algébrique des variables x et y.

Au reste il est aisé de démontrer la formule (a). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}},$$

par rapport au module c. Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.