IV.

Les fonctions transcendantes $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, $\ldots\Sigma\frac{1}{a^n}$ exprimées par des intégrales définies.

Si l'on différentie successivement la fonction $\Sigma\frac{1}{a}$, on aura

$$\frac{d\left(\Sigma\frac{1}{a}\right)}{da}=\frac{\Sigma\left(d\frac{1}{a}\right)}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\Sigma d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\Sigma\frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\frac{\Sigma d^3\left(\frac{1}{a}\right)}{da^3}=-2.3\Sigma\frac{1}{a^4}$$

etc.

$$\frac{d^n\Sigma\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\Sigma d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\ldots n.\Sigma\frac{1}{a^{n+1}}$$

où le signe $+$ a lieu, lorsque n est pair, et le signe — lorsque n est impair.

On en conclut réciproquement

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da},\quad \Sigma\frac{1}{a^3}=+\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{2.da^2},\quad \Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{2.3da^3}+\text{etc.}$$

$$\Sigma\frac{1}{a^n}=\pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3..(n\text{-}1)da^{n-1}}=\pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n\text{-}1)da^{n-1}}$$

Or nous avons trouvé que $\Sigma\frac{1}{a}=L(a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}\,dx$.

On en tire donc en différentiant par rapport à a:

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}.dx$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^2}{x-1}.dx$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^3}{x-1}.dx$$

etc.

$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^{n-1}}{x-1}.dx$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\int_0^1\frac{x^{a-1}.lx}{x-1}.dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^3}=\tfrac{1}{2}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^2}{x-1}.dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{1}{2.3}\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^3}{x-1}.dx$$

etc.

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}}=-\frac{1}{2.3.4..(2n\text{-}1)}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}\,dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{n+1}}=+\frac{1}{2.3.4..2n}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}.dx$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}}{x-1}.dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, et nous aurons

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}}{x-1}.dx+C.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\left[\int_0^1 x^{a-2}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}dx+\int_0^1 x^{a-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}dx+\int_0^1 x^{a-4}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}dx+\text{etc.}\right]$$

or $\int_0^1 x^{a-k-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha\text{-}1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}$. et par conséquent

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{(a\text{-}1)^\alpha}+\frac{1}{(a\text{-}2)^\alpha}+\frac{1}{(a\text{-}3)^\alpha}+\ldots\text{ in inf.}+C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}\, dx.$$ On tire de là

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{x-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

où α peut être positif, négatif où zéro.

On a $x^{a-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1} = 1-(a-1)\left(l\frac{1}{x}\right)+\frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2-\frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3+$ etc.

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left\{(a-1)\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{1-x}dx - \frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}.dx + \frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}.dx - \ldots\right\}$$

Considérons l'éxpression $\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}$. En développant $\frac{1}{1-x}$, on aura

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}.dx = \int\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \ldots$$

or $\int_0^1 x^n.\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x} = \Gamma(k+1)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\ldots\right),$$

donc enfin

$$L(a,\alpha) = \frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\ldots\right)$$
$$-\frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\ldots\right)$$
$$+\frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3\Gamma(\alpha)}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\ldots\right)$$

etc.

or on a $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2)=\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\,\Gamma(\alpha)$. Substituant cas valeurs, on obtient

$$L(a,\alpha) = \frac{a-1}{1}.\alpha\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\ldots\right)$$
$$-\frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha.(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\ldots\right)$$
$$+\frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha.(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\ldots\right)$$

etc.

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots \text{etc.}$$

donc en désignant $L(\infty,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha) = \alpha . L'(\alpha+1).(a-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} L'(\alpha+2).(a-1)^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2\,.\,3} L'(\alpha+3).(a-1)^3 - ..\text{etc.}$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right).\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}.dx$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}} = y$, x devient $= y^a$, $dx = ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} \cdot y^{a-1}}{y^a-1}.dy = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}.dy$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}.dy + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{y^{m-1}.\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}.dy$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}$. On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right) = \left\{A.\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy + A'\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}.dy + \text{etc.}\right\} \cdot \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy + c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy + c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy + \ldots$$

$$\text{or } \int_0^1 \left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} y^k.dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}, \text{ donc}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \Gamma(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{c}{2^\alpha} + \frac{c^2}{3^\alpha} + \frac{c^3}{4^\alpha} + \ldots\right),$$ donc en désignant

$1 + \frac{c}{2^\alpha} + \frac{c^2}{3^\alpha} + \frac{c^3}{4^\alpha} + \ldots$ par $L'(\alpha, c)$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \Gamma(\alpha).L'(\alpha,c);$$ on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right) = a^\alpha\left(A.L'(\alpha,c) + A'.L'(\alpha,c') + A''.L'(\alpha,c'') + \text{etc.}\right)$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha, c)$. Soit p. ex. $m=1$, $a=2$, on aura

$$L(\tfrac{1}{2},\alpha) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1 \frac{1-y}{y^2-1}.\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = -\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y}.$$ On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$. donc

$$L(\tfrac{1}{2},\alpha) = -2^\alpha.L'(\alpha,-1) = -2^\alpha\left(1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots\right)$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha=1$, et l'on a $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots = \log 2$, donc $L(\frac{1}{2},1) = L(\frac{1}{2}) = -2\log 2$, ce que nous avons trouvé précédemment.

En posant $\alpha=2$, on a $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{12}$, donc $L(\frac{1}{2},2) = -\frac{\pi^2}{3}$.

On peut en général exprimer $L(\frac{1}{2}, 2n)$ par $-M.\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.