VI.

Sommation de la série

$$y = \varphi(0) + \varphi(1).x + \varphi(2).x^2 + \varphi(3).x^3 + \ldots + \varphi(n)x^n$$

n étant un nombre entier positif fini ou infini, et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationnelle de n.

La fonction $\varphi(n)$ étant algébrique et rationnelle, elle est résoluble en termes de la forme An^α et $\frac{B}{(a+n)^\beta}$; y est donc résoluble en plusieurs séries de la forme

$$p = A.0^\alpha + A.x + A.2^\alpha.x^2 + A\ 3^\alpha.x^3 + \ldots + A.n^\alpha.x^n \quad \text{et}$$

$$q = \frac{B}{a^\beta} + \frac{Bx}{(a+1)^\beta} + \frac{Bx^2}{(a+2)^\beta} + \frac{B.x^3}{(a+3)^\beta} + \ldots + \frac{B.x^n}{(a+n)^\beta}.$$

La sommation de la série proposée est donc réduite à la sommation de ces deux séries.

Considérons d'abord la quantité p. Or $A.0^\alpha$ étant une quantité constante et A facteur de chaque terme de la série, nous poserons,

$$\frac{p - A.0^\alpha}{A} = f(\alpha, x). \quad \text{On a donc}$$

$$f(\alpha, x) = x + 2^\alpha\ x^2 + 3^\alpha.x^3 + 4^\alpha.x^4 + \ldots + n^\alpha.x^n$$

divisant par x, on a

$$\frac{f(\alpha, x)}{x} = 1 + 2^\alpha.x + 3^\alpha.x^2 + \ldots + n^\alpha.x^{n-1};$$

multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\int \frac{f(\alpha, x)}{x}.dx = x + 2^{\alpha-1}x^2 + 3^{\alpha-1}x^3 + \ldots + n^{\alpha-1}x^n$$

or en comparant cette série avec la précédente, on voit que

$$\int \frac{f(\alpha, x)}{x}.dx = f(\alpha - 1, x);$$

différentiant et multipliant par x, on en tire

$$f(\alpha, x) = \frac{x.df(\alpha\text{-}1, x)}{dx},$$

ou en écrivant seulement $f(\alpha)$, au lieu de $f(\alpha, x)$

$$f(\alpha) = \frac{x.df(\alpha-1)}{dx}.$$

Connaissant donc la valeur de $f(\alpha-1)$, on peut en déduire celle de $f(\alpha)$.

Mettant $\alpha-1$ au lieu de α, on aura

$$f(\alpha-1) = \frac{x.df(\alpha-2)}{dx};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$f(\alpha) = \frac{x.d[x.d.f(\alpha-2)]}{dx^2};$$

mettant de plus $\alpha-2$, $\alpha-3$ etc. au lieu de α, on obtient

$$f(\alpha-2) = \frac{x.df(\alpha-3)}{dx}$$

$$f(\alpha-3) = \frac{x.df(\alpha-4)}{dx}$$

$$f(\alpha-4) = \frac{x.df(\alpha-5)}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2) = \frac{x.df(1)}{dx}$$

$$f(1) = \frac{x.df(0)}{dx}$$

Substituant ces valeurs, on en tire

$$f(\alpha) = \frac{x.d(x.d(x.d(x\ldots d(x.df(0)\ldots)))}{dx^\alpha}.$$

On a ainsi la fonction $f(\alpha)$ déterminée par la fonction $f(0)$. Or on a

$$f(0) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}, \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = x + 2^\alpha.x^2 + 3^\alpha.x^3 + \ldots + n^\alpha.x^n = \frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\left(x.d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\ldots\right)\right)\right)\right)}{dx^\alpha}$$

Ainsi on connaît donc la fonction $f(\alpha)$, et par suite on connaît de même la fonction p. Si la suite va à l'infini, on a $f(0) = \frac{x}{1-x}$ et par conséquent

$$x + 2^\alpha.x^2 + 3^\alpha.x^3 + 4^\alpha.x^4 + \ldots = \frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\left(x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)\cdots\right)\right)\right)}{dx^\alpha}$$

En faisant successivement $\alpha = 0, 1, 2, 3$ etc., on aura

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots=\frac{x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)}{dx}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\ldots=\frac{x.d\left[x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]}{dx^2}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Considérons ensuite l'autre série, savoir

$$F(\alpha)=\frac{1}{a^\alpha}+\frac{x}{(a+1)^\alpha}+\frac{x^2}{(a+2)^\alpha}+\frac{x^3}{(a+3)^\alpha}+\ldots+\frac{x^n}{(a+n)^\alpha};$$

multipliant par x^a et ensuite différentiant, on aura

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=\frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-2}}+\frac{x^a}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^{a+1}}{(a+2)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{x^{n+a-1}}{(a+n)^{\alpha-1}};$$

ou bien

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=x^{a-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}}+\frac{x}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^2}{(a+2)^{\alpha-1}}+\ldots\frac{x^n}{(a+n)^{\alpha-1}}\right).$$

On voit par là que

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=x^{a-1}.F(\alpha-1);$$

en multipliant par dx et intégrant, on obtient

$$F(\alpha)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-1)}{x^a}$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(\alpha-1)$

Mettant maintenant $\alpha-1$, $\alpha-2$, etc. au lieu de α, on aura

$$F(\alpha-1)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-2)}{x^a}$$

$$F(\alpha-2)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-3)}{x^a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(2)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(1)}{x^a}$$

$$F(1)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(0)}{x^a}.$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(0)$, car on aura par substitution:

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int dx.x^{a-1}.F(0),$$

or $\quad F(0)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx.(x^{a-1}-x^{n+a})}{1-x}.$$

Si la série va à l'infini, on a $F(0)=\frac{1}{1-x}$, et par suite

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^\alpha}\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\;\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int dx\left(\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\right)$$

Les quantités constantes, dues aux intégrations successives, dovient être des valeurs particulières des fonctions $F(0)$, $F(1)$, $F(2)\ldots F(\alpha)$.

Ayant ainsi déterminé les fonctions $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$, on en tirera aisément la somme de la série proposée

$$\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\ldots+\varphi(n).x^n.$$

Le procédé, dont on a fait usage pour trouver la somme de cette série à l'aide de la série $1+x+x^2+\ldots+x^n$, peut aussi servir à la détermination de la somme de la série

$$z=f(0).\varphi(0)+f(1).\varphi(1).x+f(2).\varphi(2).x^2+\ldots+f(n).\varphi(n).x^n$$

à l'aide de la série

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\ldots+f(n)x^n,$$

où $f(n)$ signifie une fonction quelconque, et $\varphi(n)$ une fonction rationnelle. En effet la série z est résoluble en plusieurs séries de la forme

$$A.(f(1)x+2^\alpha.f(2).x^2+3^\alpha.f(3).x^3+\ldots+n^\alpha.f(n).x^n),$$

$$\text{et } A'.\left(\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1).x}{(a+1)^\alpha}+\frac{f(2).x^2}{(a+2)^\alpha}+\ldots\frac{f(n).x^n}{(a+n)^\alpha}\right).$$

Si l'on pose $f(0)+f(1)x+f(2).x^2+\ldots+f(n)x^n=s$, on trouvera précisément de la même manière que ci-dessus

$$f(1)x+2^\alpha.f(2).x^2+3^\alpha.f(3).x^3+\ldots+n^\alpha.f(n).x^n=\frac{x:d(x.d(x.d(x\ldots d(x.ds)\ldots)))}{dx^\alpha}$$

$$\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1)}{(a+1)^\alpha}.x+\frac{f(2)}{(a+2)^\alpha}.x^2+\ldots+\frac{f(n)}{(a+n)^\alpha}.x^n=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}.\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}.\int dx.x^{a-1}.ds.$$

Soit p. ex. $s=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\cdots$

on aura

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a+1}+\tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{a+2}+\frac{1}{2.3}.\frac{x^3}{a+3}+\ldots=.\frac{1}{x^a}\int dx.x^{a-1}.e^x$$

$$=\frac{e^x}{x}\left(1-\frac{(a-1)}{x}+\frac{(a-1)(a-2)}{x^2}-\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{x^3}+\ldots\right)+\frac{c}{x^a}.$$