

IX.

Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendentes.

Soit y une fonction de x , déterminée par l'équation

$$0 = sy + t \cdot \frac{dy}{dx},$$

s et t étant deux fonctions entières de x .

Soit de même

$$\int ry dx = tvy,$$

on aura en différentiant

$$ry = \left(v \cdot \frac{dt}{dx} + t \cdot \frac{dv}{dx} \right) y + vt \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{or } t \cdot \frac{dy}{dx} = -sy, \text{ donc}$$

$$r = v \left(\frac{dt}{dx} - s \right) + t \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Cela posé, soit $v = \frac{1}{x-a}$, on aura

$$r = \frac{\frac{dt}{dx} - s}{x-a} - \frac{t}{(x-a)^2}$$

ou
$$r = \frac{\varphi'x - fx}{x-a} - \frac{\varphi x}{(x-a)^2}$$

en faisant $t = \varphi x$ et $s = fx$.

Or on voit sans peine que

$$\frac{\varphi'x - fx}{x-a} = \frac{\varphi'a - fa}{x-a} + \varphi''a - f'a + \frac{\varphi'''a - f''a}{1} (x-a) + \frac{\varphi''''a - f'''a}{2 \cdot 3} (x-a)^2 + \dots$$

$$\frac{\varphi x}{(x-a)^2} = \frac{\varphi a}{(x-a)^2} + \frac{\varphi'a}{x-a} + \frac{\varphi''a}{2} + \frac{\varphi'''a}{2 \cdot 3} (x-a) + \frac{\varphi''''a}{2 \cdot 3 \cdot 4} (x-a)^2 + \dots$$

donc on aura

$$r = - \frac{\varphi a}{(x-a)^2} - \frac{fa}{x-a} + R,$$

d'où l'on tire en multipliant par ydx , et intégrant

$$vty = -\varphi a \cdot \int \frac{ydx}{(x-a)^2} - fa \cdot \int \frac{ydx}{x-a} + \int Rydx.$$

Cela posé, soit $z = \int \frac{ydx}{x-a}$, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{ydx}{(x-a)^2},$$

donc en substituant

$$vty = -\varphi a \cdot \frac{dz}{da} - fa \cdot z + \int Rydx.$$

Soit $z = qp$, on aura en substituant

$$\int Rydx - vty = \varphi a \cdot p \cdot \frac{dq}{da} + \varphi a \cdot q \cdot \frac{dp}{da} + pq \cdot fa$$

Soit $\varphi a \cdot \frac{dq}{da} + fa \cdot q = 0$, on aura

$$q = \psi a \text{ en faisant } y = \psi x$$

et

$$\int Rydx - \frac{t \cdot \psi x}{x-a} = \varphi a \cdot \psi a \cdot \frac{dp}{da}$$

donc

$$p = \iint \frac{R \cdot \psi x}{\varphi a \cdot \psi a} \cdot dx \cdot da - \int \frac{\psi x \cdot \varphi x}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \frac{da}{x-a},$$

donc

$$\frac{1}{\psi a} \cdot \int \frac{\psi x \cdot dx}{x-a} - \psi x \cdot \varphi x \int \frac{da}{(a-x)\varphi a \cdot \psi a} = \iint \frac{R \cdot \psi x}{\varphi a \cdot \psi a} \cdot dx \cdot da \dots (1)$$

où l'on a

$$R = \frac{1}{2} \varphi'' a - f' a + \left(\frac{1}{3} \varphi''' a - \frac{1}{2} f'' a\right)(x-a) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \varphi'''' a - \frac{1}{2 \cdot 3} f''' a\right)(x-a)^2 + \dots$$

Le second membre de l'équation (1) peut, comme on le voit, toujours être développé en plusieurs termes de la forme:

$$A_{m,n} \cdot \int \frac{a^m \cdot da}{\varphi a \cdot \psi a} \cdot f x^n \cdot \psi x \cdot dx.$$

En faisant $\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$

et $f x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots$

il est facile de trouver

$$A_{m,n} = (n+1) \cdot \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1};$$

donc on aura la formule générale:

$$\frac{1}{\psi a} \cdot \int \frac{\psi x \cdot dx}{x-a} - \psi x \cdot \varphi x \int \frac{da}{(a-x)\varphi a \cdot \psi a} = \Sigma((n+2)\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}) \int \frac{a^m da}{\varphi a \cdot \psi a} \cdot f x^n \psi x dx. (2)$$

Il faut remarquer que les intégrales par rapport à x doivent être faites depuis une valeur de x qui réduit à zéro la fonction $\psi x \cdot \varphi x$, et celles par rapport à a depuis une valeur de cette variable qui réduit à zéro la fonction $\frac{1}{\psi a}$.

La fonction $y = \psi x$ étant déterminée par l'équation

$$y \cdot fx + \varphi x \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

il est clair qu'on a

$$y = e^{-\int \frac{fx}{\varphi x} dx};$$

donc y est de la forme

$$\psi x = \frac{e^p}{(x-\delta)^m \cdot (x-\delta_1)^{m_1} \dots}$$

m, m_1, \dots étant des nombres positifs moindre que l'unité. p est une fonction rationnelle, qui s'évanouit lorsque tous les facteurs de φx sont inégaux et en même temps le degré de fx est moindre que celui de φx .

Supposons maintenant qu'on prenne les intégrales entre deux limites de x qui rendent égale à zéro la fonction $\varphi x \cdot \psi x$, on aura

$$\int \frac{\psi x \cdot dx}{x-a} = \psi a \Sigma((n+1) \cdot \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}) \int x^n \cdot \psi x \cdot dx \cdot \int \frac{a^m da}{\varphi a \cdot \psi a} \dots \quad (3)$$

Si l'on donne de même à a une telle valeur que $\frac{1}{\psi a}$ devient égal à zéro on aura:

$$0 = \Sigma((n+1) \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}) \int x^n \cdot \psi x \cdot dx \cdot \int \frac{a^m da}{\varphi a \cdot \psi a} \dots \dots \dots \quad (4)$$

Il y a un cas remarquable qu'il est important de considérer à part, savoir celui où

$$\frac{1}{\psi x} = \varphi x \cdot \psi x;$$

on a alors

$$\psi x = y = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}}$$

done

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi' x}{[\sqrt{\varphi x}]^3}.$$

L'équation $y \cdot fx + \varphi x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ devient donc

$$fx - \frac{1}{2} \varphi' x = 0$$

done

$$fx = \frac{1}{2} \varphi' x$$

et

$$\beta_m = \frac{1}{2} (m+1) \alpha_{m+1}.$$

(2) L'équation (2) devient donc dans ce cas:

$$V(\varphi a) \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - V(\varphi x) \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} = \Sigma \frac{1}{2} (n-m) \alpha_{m+n+2} \cdot \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi x}} \cdot \int \frac{a^m da}{\sqrt{\varphi a}} \dots \quad (5)$$

Pour vérifier cette formule dans un cas particulier, soit $\varphi x = 1 - x^2$, on aura $\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1,$

$$V(1-a^2) \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} - V(1-x^2) \cdot \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = 0,$$

ce qui est vrai, car on a

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \cdot \log \left(\frac{ax-1 + \sqrt{(1-a^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}}{ax-1 - \sqrt{(1-a^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \log \left(\frac{ax-1 + \sqrt{(1-a^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}}{ax-1 - \sqrt{(1-a^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}} \right)$$

Si l'on fait $\varphi x = (1-x^2)(1-c^2x^2)$, on a

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -(1+c^2), \alpha_3 = 0, \alpha_4 = c^2, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} & V((1-a^2)(1-c^2a^2)) \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} - V((1-x^2)(1-c^2x^2)) \cdot \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}} \\ &= c^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} \cdot \int \frac{da}{\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}} - c^2 \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} \cdot \int \frac{a^2 da}{\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}}. \end{aligned}$$

Cette formule contient implicitement les propriétés remarquables des fonctions elliptiques que M. Legendre a données dans ses Ex. de calc. int. T. 1. p. 154 et sq.