

## XXI.

*Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable.*

### 1.

**L**a fonction  $fx$  étant donnée, trouver la fonction  $\varphi x$  par l'équation

$$\varphi x + 1 = \varphi(fx).$$

Soit  $x = \psi y$  et  $fx = \psi(y + 1)$ , on aura

$$1 + \varphi \psi y = \varphi \psi(y + 1);$$

ou bien

$$\varphi \psi(y + 1) - \varphi \psi y = 1;$$

c'est-à-dire

$$\Delta \varphi \psi y = 1;$$

donc en intégrant

$$\varphi \psi y = y + \chi y,$$

où  $\chi y$  signifie une fonction périodique quelconque de  $y$ , de sorte que

$$\chi(y + 1) = \chi y.$$

Maintenant  $\psi y = x$ , d'où l'on tire  $y = {}^1\psi x$ , et par conséquent

$$\varphi x = {}^1\psi x + \chi({}^1\psi x) \dots \dots \dots (1)$$

Il s'agit maintenant de trouver la fonction  ${}^1\psi x$ . Cela se fait comme suit.

On a  $x = \psi y$  et  $fx = \psi(y + 1)$ ; donc

$$\psi(y + 1) = f\psi y \dots \dots \dots (2)$$

Voilà une équation aux différences finies, d'où l'on tire  $\psi y$ , et cette fonction étant connue, on a

$$x = \psi y \text{ et de là } y = {}^1\psi x.$$

De ce qui précède, on voit que le problème est toujours résoluble, et qu'il a même une infinité de solutions.

Supposons par exemple  $fx = x^n$ , l'équation (2) deviendra

$$\psi(y + 1) = (\psi y)^n.$$

En mettant ici successivement  $y + 1$ ,  $y + 2$ , etc. à la place de  $y$ , on aura

$$\psi(y + 2) = (\psi(y + 1))^n = (\psi y)^{n^2}$$

et en général  $\psi(y + 3) = (\psi(y + 2))^n = (\psi y)^{n^3}$ ,  
 $\psi(y + x) = (\psi y)^{n^x}$ .

Faisant  $y = 0$  et  $\psi(0) = a$ , on a  
 $\psi x = a^{n^x}$ , et par suite  $\psi y = a^{n^y}$ ;

or  $\psi y = x$ ; donc  $a^{n^y} = x$ , et de là  $n^y = \frac{\log x}{\log a}$ ,

et  $y = \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n}$ ;

donc  $\psi x = \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n}$ .

L'équation (1) deviendra donc

$$\varphi x = \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n} + \chi \left( \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n} \right),$$

qui est la fonction cherchée.

Si l'on met  $x^n$  au lieu de  $x$ , on aura

$$\begin{aligned} \varphi(x^n) &= \frac{\log \log x^n - \log \log a}{\log n} + \chi \left( \frac{\log \log x^n - \log \log a}{\log n} \right) \\ &= \frac{\log n + \log \log x - \log \log a}{\log n} + \chi \left( \frac{\log n + \log \log x - \log \log a}{\log n} \right) \\ &= 1 + \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n} + \chi \left( 1 + \frac{\log \log x - \log \log a}{\log n} \right) = 1 + \varphi x. \end{aligned}$$

La fonction a donc la propriété demandée. Le cas le plus simple est celui où  $\chi y = 0$  et  $a = e$ ,  $\log e$  étant  $= 1$ ; on aura donc

$$\varphi x = \frac{\log \log x}{\log n} \text{ et } \frac{\log \log x}{\log n} + 1 = \frac{\log \log x^n}{\log n}.$$

## 2.

Considérons en général l'équation

$$F(x, \varphi(fx), \varphi(\psi x)) = 0,$$

où  $F$ ,  $f$  et  $\psi$  sont des fonctions données, et où l'on cherche la fonction  $\varphi$ .

Soit  $fx = y_t$  et  $\psi x = y_{t+1}$ , l'équation devient

$$F(x, \varphi y_t, \varphi y_{t+1}) = 0.$$

Soit  $\varphi y_t = u_t$ , on aura  $\varphi y_{t+1} = u_{t+1}$ , et par conséquent

$$F(x, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De l'équation  $fx = y_t$ , on trouve  $x = f^{-1}y_t$ ; donc en substituant cette valeur dans l'équation  $\psi x = y_{t+1}$ , on obtient

$$y_{t+1} = \psi(f^{-1}y_t) \dots \dots \dots (1)$$

De cette équation on tire  $y_t$  et par conséquent aussi  $x = 'fy_t$  en fonction de  $t$ . Cette valeur étant substituée dans l'équation  $F(x, u_t, u_{t+1}) = 0$ , donne

$$F('fy_t, u_t, u_{t+1}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

De cette équation on tire  $u_t = \theta t = \varphi(y_t)$ . Faisant  $y_t = z$ , on trouvera  $t = 'y_z$ ; donc enfin

$$\varphi(z) = \theta('y_z).$$

Exemple. Trouver la fonction  $\varphi$  déterminée par l'équation

$$(\varphi x)^2 = \varphi(2x) + 2.$$

Soit  $\varphi x = u_t = \varphi y_t$ , et  $\varphi(2x) = u_{t+1} = \varphi(y_{t+1})$ , on aura

$$(u_t)^2 = u_{t+1} + 2.$$

On en tire

$$u_{t+1} = u_t^2 - 2.$$

Supposons

$$u_1 = a + \frac{1}{a},$$

donc

$$u_2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$u_3 = a^4 + \frac{1}{a^4}$$

et en général

$$u_t = a^{2^{t-1}} + \frac{1}{a^{2^{t-1}}}.$$

Ayant  $x = y_t$  et  $2x = y_{t+1}$ , on a  $y_{t+1} = 2y_t$ , d'où l'on tire

$$y_t = c \cdot 2^{t-1} = x;$$

donc

$$2^{t-1} = \frac{x}{c}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$\varphi x = u_t = a^{2^{t-1}} + a^{-2^{t-1}},$$

donne

$$\varphi x = a^{\frac{x}{c}} + a^{-\frac{x}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^x + \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{-x},$$

ou bien

$$\varphi x = b^x + b^{-x}.$$

Donc

$$(b^x + b^{-x})^2 = b^{2x} + b^{-2x} + 2.$$