XXIII.

Extraits de quelques lettres de l'auteur à Mr. Crelle.

1.

Si une équation du cinquième degré dont les coefficiens sont *des nombres rationnels*, est résoluble algébriquement, on peut donner aux racines la forme suivante:

$$x=c+A.a^{\frac{1}{5}}.a_1^{\frac{2}{5}}.a_2^{\frac{4}{5}}.a_3^{\frac{3}{5}}+A_1.a_1^{\frac{1}{5}}.a_2^{\frac{2}{5}}.a_3^{\frac{4}{5}}.a^{\frac{3}{5}}+A_2.a_2^{\frac{1}{5}}.a_3^{\frac{2}{5}}.a^{\frac{4}{5}}.a_1^{\frac{3}{5}}+A_3.a_3^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{2}{5}}.a_1^{\frac{4}{5}}.a_2^{\frac{3}{5}},$$

où

$$\begin{aligned} a &= m+n\sqrt{(1+e^2)}+\sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_1 &= m-n\sqrt{(1+e^2)}+\sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_2 &= m+n\sqrt{(1+e^2)}-\sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_3 &= m-n\sqrt{(1+e^2)}-\sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]}, \end{aligned}$$

$$A=K+K'a+K''a_2+K'''aa_2,\quad A_1=K+K'a_1+K''a_3+K'''a_1a_3$$

$$A_2=K+K'a_2+K''a+K'''aa_2,\quad A_3=K+K'a_3+K''a_1+K'''a_1a_3.$$

Les quantités c, h, e, m, n, K, K', K'', K''' sont des nombres *rationnels*.

Mais de cette manière l'équation $x^5+ax+b=0$ n'est pas résoluble, tant que a et b sont des quantités quelconques. J'ai trouvé de pareils théorèmes pour les équations du 7ème, 11ème, 13ème etc. degré.

Friberg le 14 mars 1826.

2.

Une propriété générale des fonctions dont la différentielle est algébrique, consiste en ce que la somme d'un nombre *quelconque* de fonctions peut être exprimée par un nombre déterminé des mêmes fonctions. Savoir:

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\ldots+\varphi(x_\mu)=v-(\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\varphi(z_3)+\ldots+\varphi(z_n)).$$

x_1, x_2, $\ldots x_\mu$ sont des quantités quelconques, z_1, z_2, $\ldots z_n$ des fonctions algébriques de ces quantités, et v une fonction algébrique-logarithmique des mêmes quantités. n est un nombre déterminé indépendant de μ. Si par exemple φ est une fonction elliptique, on a, comme on sait, $n = 1$. Si la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît jusqu'à présent aucune propriété. Comme un des cas les plus remarquables je vais rapporter le suivant:

En désignant la fonction

$$\int \frac{(\alpha + \beta x) . dx}{\sqrt{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)}}$$

par φx, on a

$$1) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - (\varphi(y_1) + \varphi(y_2)),$$

où x_1, x_2, x_3, sont trois quantités variables indépendantes, C une constante et y_1, y_2 les deux racines de l'équation

$$y^2 - \left(\frac{c_2^2 + 2c_1 - a_4}{2c - a_5} - x_1 - x_2 - x_3\right) y + \frac{\left(\frac{c^2 - a}{x_1 . x_2 . x_3}\right)}{2c_2 - a_5} = 0.$$

Les quantités c, c_1, c_2 sont déterminées par les trois équations linéaires:

$$c + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + x_1^3 = \sqrt{(a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_6 x_1^6)}$$
$$c + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + x_2^3 = \sqrt{(a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_6 x_2^6)}$$
$$c + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + x_3^3 = \sqrt{(a + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_6 x_3^6)}.$$

Toute la théorie de la fonction φ est comprise dans l'équation (1), car la propriété exprimée par cette équation suffit, comme on peut démontrer, pour la détermination complète de cette fonction.

Paris le 9 août 1826.

3.

J'ai trouvé la somme de la série suivante

$$\sin \varphi . \frac{a}{1+a} + \sin 3\varphi . \frac{a^3}{1+a^3} + \sin 5\varphi . \frac{a^5}{1+a^5} + \ldots$$

où a et φ sont des quantités réelles quelconques. Elle peut s'exprimer par des fonctions elliptiques.

Christiania le 15 novembre 1827.

4.

Théorèmes sur les équations.

A. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques et $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque; si l'on suppose entre x_1, x_2, $\ldots$ x_n les n équations suivantes:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,$$
$$\varphi(x_2, x_3, \dots x_n, x_1) = 0,$$
$$\varphi(x_3, x_4, \dots x_n, x_1, x_2) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi(x_n, x_1, x_2, \dots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $n - 1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par la fonction $\varphi(x, x, x, \dots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé, je dis que cette équation sera décomposable en $\frac{m^n - m}{n}$ équations, chacune du degré n, et dont les coefficiens sont déterminés à l'aide d'une équation du degré $\frac{m^n - m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré n seront résolubles *algébriquement*.

Par exemple si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré. Pareillement si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations

$$x_2 = \frac{a + bx_1 + cx_1^2}{\alpha + \beta x_1}, \quad x_3 = \frac{a + bx_2 + cx_2^2}{\alpha + \beta x_2}, \quad x_1 = \frac{a + bx_3 + cx_3^2}{\alpha + \beta x_3},$$

on aura pour déterminer x_1, x_2, x_3 une équation du sixième degré, mais elle sera décomposable en deux équations du troisième degré, les coefficiens de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

B. Si trois racines d'une équation quelconque irréductible dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

C. Si deux racines d'une équation irréductible dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

Christiania, le 18 octobre 1828.