



THE  
ABEL  
PRIZE  
2020

La Academia de Ciencias y Letras de Noruega  
ha resuelto conceder el Premio Abel 2020 a

## Hillel Furstenberg

Universidad Hebrea  
de Jerusalén, Israel

## Gregory Margulis

Universidad de Yale, New Haven,  
Connecticut, EE.UU.

«por haber sido pioneros en el uso de métodos de probabilidad y de dinámica en la teoría de grupos, la teoría de números y la combinatoria».

Una rama central de la teoría de la probabilidad es el estudio de las caminatas aleatorias, como la ruta tomada por un turista que está explorando una ciudad desconocida y lanza una moneda al aire para optar entre girar a la izquierda o a la derecha en cada cruce. Hillel Furstenberg y Gregory Margulis inventaron técnicas de caminatas aleatorias similares para investigar la estructura de los grupos lineales que son, por ejemplo, conjuntos de matrices cerradas bajo el inverso y el producto. Al tomar productos de matrices escogidas al azar, se intenta describir cómo crece el resultado y lo que este crecimiento dice acerca de la estructura del grupo.

Furstenberg y Margulis han introducido conceptos visionarios poderosos, resuelto problemas formidables y descubierto sorprendentes y fructuosas conexiones entre la teoría de grupos, la teoría de la probabilidad, la teoría de números, la combinatoria y la teoría de grafos. Su trabajo ha creado una escuela de pensamiento con gran repercusión en muchos campos de las matemáticas y sus aplicaciones.

En 1963, partiendo del estudio de los productos de matrices elegidos al azar, Hillel Furstenberg introdujo y clasificó un concepto de capital importancia conocido ahora con el nombre de '*frontera Furstenberg*'. Gracias a este último, llegó a una fórmula de tipo Poisson que expresa funciones armónicas en un grupo general en términos de sus valores límite. En sus trabajos de principios de los 60 sobre las caminatas aleatorias, realizados en parte con Harry Kesten, obtuvo también un criterio importante para la positividad del mayor exponente de Lyapunov.

Motivado por la aproximación diofántica, Furstenberg introdujo en 1967 la noción de disyunción de los sistemas ergódicos, un concepto similar al de ser coprimo respecto de los enteros. Esta noción natural resultó ser de gran profundidad y tener aplicaciones en una diversidad de áreas, inclusive el procesamiento de señales y cuestiones sobre filtraje en ingeniería eléctrica, la geometría de conjuntos fractales, los flujos homogéneos y la teoría de números. Su '*conjetura  $\times 2 \times 3$* ' es un ejemplo



de una maravillosa simplicidad que ha conducido a numerosos desarrollos ulteriores. Furstenberg consideró las dos aplicaciones que transforman cuadrados y cubos en el círculo unitario complejo, y demostró que los únicos conjuntos cerrados invariantes por estas transformaciones son o bien finitos, o todo el círculo. Su conjetura afirma que las únicas medidas invariantes son o bien finitas, o bien invariantes por rotación. Pese a los esfuerzos de numerosos matemáticos, la cuestión de la clasificación de las medidas permanece abierta. La clasificación de las medidas invariantes por grupos ha pasado a ser un amplio campo de investigación con influencia sobre la ergodicidad aritmética cuántica, las superficies de traslación, la versión de Margulis de la conjetura de Littlewood y los espectaculares trabajos de Marina Ratner. Considerando las medidas invariantes dentro de un marco geométrico, Furstenberg demostró en 1972 la ergodicidad única del flujo del horociclo de las superficies hiperbólicas, un resultado con muchos descendientes.

En 1977, aplicando la teoría ergódica y su propio teorema de recurrencia múltiple, Furstenberg aportó una nueva y sorprendente demostración del teorema de Szemerédi sobre la existencia de grandes progresiones aritméticas en subconjuntos de enteros con densidad positiva. En trabajos posteriores realizados en coautoría con Yitzhak Katznelson, Benjamin Weiss y otros, encontró generalizaciones en dimensiones superiores y de mayor alcance del teorema de Szemerédi y otras aplicaciones de la dinámica topológica y de la teoría ergódica a la teoría de Ramsey y la combinatoria aditiva. Este trabajo ha influido en muchos desarrollos posteriores, inclusive los trabajos de Ben Green, Terence Tao y Tamar Ziegler sobre la conjetura de Hardy-Littlewood y las progresiones aritméticas de los números primos.

Gregory Margulis ha revolucionado el estudio de los retículos en grupos semi-simples. Un retículo sobre un grupo es un subgrupo discreto, de forma tal que el cociente tiene un volumen finito. Para grupos semi-simples, Margulis clasificó estos retículos a mediados de la década de 1970 en sus teoremas de '*superrigidez*' y '*aritmética*'. Armand Borel y Harish-Chandra construyeron retículos en grupos semi-simples usando construcciones aritméticas, esencialmente como el grupo de matrices con valores enteros en un gran grupo matricial. Margulis demostró que todos los retículos de rango 2 o superior provienen de esta construcción aritmética, como lo había conjeturado Atle Selberg. En 1978, Margulis descubrió la estructura de estos retículos en su '*teorema de subgrupo normal*'. Sus técnicas

se basan fundamentalmente en el uso asombroso y sorprendente de métodos probabilísticos (caminatas aleatorias, teorema de Oseledets, susceptibilidad, frontera de Furstenberg), así como de la propiedad de Kazhdan (T).

En su disertación de 1970, Margulis construyó la denominada '*medida de Bowen-Margulis*' de una variedad Riemanniana compacta de curvatura variable estrictamente negativa. Usando la propiedad "mixing" de los flujos geodésicos con respecto a esta medida, demostró un análogo al teorema del número primo, una fórmula asintótica del número de geodésicas cerradas más cortas de una longitud dada. Anteriormente, el único cómputo de este tipo se hacía mediante la fórmula de traza de Selberg, que solo funciona para los espacios localmente simétricos. Desde entonces, se han estudiado numerosos problemas de cómputo y equidistribución utilizando el enfoque "mixing" de Margulis.

Otra espectacular aplicación de sus métodos es la prueba, en 1984, de una conjetura de la teoría de números formulada décadas atrás por Oppenheim: una forma cuadrática no degenerada con 3 o más variables o toma un conjunto denso de valores enteros, o es el múltiplo de una forma con coeficientes racionales.

En el campo de la teoría de grafos, la creatividad de Margulis le llevó, en 1973, a la construcción de la primera familia explícita de expansores conocida, utilizando la propiedad de Kazhdan (T). Un expansor es un grafo con alta conectividad. Esta noción, presentada por Mark Pinsker, proviene del estudio de las redes en los sistemas de comunicaciones. Actualmente, los grafos expansores son una herramienta fundamental en informática y en códigos de corrección de errores. En 1988, Margulis construyó redes óptimas, actualmente conocidas como grafos de Ramanujan, que fueron descubiertas independientemente por Alex Lubotzky, Peter Sarnak y Ralph Phillips.

La influencia de Furstenberg y Margulis va mucho más allá de sus resultados y campos de investigación originarios. Son reconocidos como pioneros por una amplia comunidad de matemáticos que abarca expertos en la teoría de Lie, grupos discretos y matrices aleatorias, informática y teoría de grafos. Han demostrado la ubicuidad de los métodos probabilísticos y la efectividad de cruzar las fronteras entre distintas disciplinas matemáticas, como la tradicional dicotomía entre matemáticas puras y aplicadas.

