

Abelprisvinner 2011 John Willard Milnor

Forklaringer til ord og uttrykk i komiteens begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris

Tradisjonelt presenterer Abelkomiteen en begrunnelse for sitt valg av prisvinner. Denne begrunnelsen er ikke alltid like lett tilgjengelig for den gjennomsnittlige leser. I denne artikkelen skal vi forsøke å gjøre terskelen litt lavere gjennom å beskrivelse faguttrykkene, fremmedordene og de aktuelle begrepene på en mer tilgjengelig måte.

Først noen fagområder:

Topologi (fra det greske topos, “sted”, og logos, “ord, mening”) er en stor matematisk disiplin som befatter seg med ulike figurer, som kurver, flater, legemer, osv. Topologer studerer egenskaper ved figurene som er uavhengig av kontinuerlige deformasjoner av figurene, slik som strekking, vridning og bøyning. Det er imidlertid ikke lov til å rive figurene i stykker eller lime sammen deler. Avstandsbegrepet er ikke vesentlig, heller ikke areal eller vinkler. En smultring og en kaffekopp med én hank er topologisk ekvivalente, dvs. at fra et topologisk ståsted skiller vi ikke mellom de to flatene. Topologi kalles av og til for gummistrikk-geometri.

Geometri (fra gammelgresk, geo- “jord”, -metri “måling”) “Jord-måling” er den del av matematikken som befatter seg med spørsmål knyttet til form, størrelse, relativ posisjon av figurer og egenskapene til rommet. Geometri er en av de eldste vitenskapene. Forskjellen på topologi og geometri er måling. Den korteste avstanden mellom to punkter på en flate er en geometrisk egenskap, men ikke en topologisk. Strekker vi flaten slik at vi endrer avstanden mellom to punkter, så har vi endret geometrien til flaten, men ikke topologien.

Differensialtopologi og differensialgeometri er best beskrevet gjennom sine likheter og forskjeller. Likheten er at begge tar for seg egenskaper ved differensiabel mangfoldigheter, dvs. objekter hvor begrepet tangent har mening og hvor det i tillegg er mulig å regne på hvordan de ser ut. Veldig ofte kan dette gjøres på flere forskjellige måter.

Fra ståstedet til differensialtopologen så er overflaten på en smultring og overflaten på en en-hanket kaffekopp like. Smultringen er tenkt laget i et elastisk stoff slik at vi uten å rive i stykker eller klistre igjen hullet kan omforme smultringen til en kopp med hank. Vi sier at vi har en global innfallsvinkel til beskrivelsen av legemet, siden det på denne måten er umulig å fastslå om to figurer er like bare ved å se på et lite utsnitt av dem. Vi må ha tilgang til hele figurene for å avgjøre om de er like.

Tar vi differensialgeometriens utgangspunkt, så vil smultringen og koppen være forskjellige, siden det ikke er nok å snu på smultringen for å få en kopp. Dette er i og for seg også en global innfallsvinkel, men et viktig skille mellom de to disiplinene er at geometeren faktisk ikke trenger å se hele figurene for å se at de er forskjellige. Ved å studere krumningen i ulike punkter kan hun raskt fastslå at hanken er mye tynnere og har større krumning enn et hvert sted på smultringen.

Algebra er den delen av matematikken som tar for seg regler for regneoperasjoner og relasjoner og konstruksjoner og begreper utledet fra dem. Dette inkluderer polynomer, likninger og algebraiske strukturer. Sammen med geometri, topologi, analyse og tallteori utgjør algebra grunnlaget for ren matematikk.

Kombinatorisk topologi er det samme som i dag kalles algebraisk topologi. Opphavet til navnet skyldes at innen kombinatorisk topologi kutter man opp rom i enkeltbestanddeler for så å sette dem sammen igjen, gjerne på en annen måte. Hvor vidt dette er mulig koker ofte ned til et kombinatorisk spørsmål. Bakgrunnen for navneendringen skriver seg fra inspirasjon fra den tyske matematikeren Emmy Noethers pionerarbeid innen homologi-teori, og kan dateres nokså nøyaktig ved hjelp av et par interne notat i den franske Bourbaki-gruppa. I 1942 omtales topologien som kombinatorisk, mens etter 1944 brukes uttrykket algebraisk topologi.

Algebraisk K-teori er et generelt verktøy for å klassifisere objekter, innen mange ulike matematiske fagområder. Verktøyet ble oppfunnet av den franske matematikeren Alexander Grothendieck på andre halvpart av 1950-tallet. Algebraisk K-teori er den algebraiske varianten av dette generelle verktøyet.

Noen aktuelle begreper

Eksotiske glatte sfærer i sju dimensjoner

En sfære i sju dimensjoner er en generalisering av den ordinære to-dimensjonale sfæren. Vi betrakter en sirkel som en en-dimensjonal sfære, og ved å fikserer to diametralt motsatte punkter og spinne sirkelen rundt i den neste dimensjonen, får vi en to-dimensjonal sfære. Vi kan gjøre det samme med en to-dimensjonal sfære, sette en fingertupp på nordpolen og en på sydpolen, og spinne sfæren rundt i en høyere dimensjon. Det gir oss en (ikke-visuell) tre-dimensjonal sfære. Dette fortsetter vi med til vi kommer til en sju-dimensjonal sfære.

En annen beskrivelse av sfærene går via symmetri. Sirkelen består av alle punkter i planet med en gitt avstand til et bestemt punkt, som vi kaller sentrum. Den to-dimensjonale sfæren er definert på samme måte, som alle punkter i rommet med gitt avstand til et sentrum. Den sju-dimensjonale sfæren består av alle punkter i et åtte-dimensjonalt rom med gitt avstand til et utvalgt sentrum. Eksotiske sfærer er sfærer (i alle dimensjoner) utstyrt med en differensiabel struktur (se dette) som er forskjellig fra den vanlige strukturen.

Differensiabile strukturer

Det er mulig å definere differensiabile struktur på mange forskjellige geometriske objekter, men vi skal bruke en vanlig sfære som vårt illustrerende eksempel. Lokalt, dvs. på en liten del av sfæren, er det å gi en differensiabel struktur, omtrent det samme som å tegne et kart over området. Vanskeligheten, i en matematisk forstand, er ikke å tegne kartet, men å få alle de enkelte kartene til å henge sammen slik at de dekker hele sfæren, eller jordkoden. Intuitivt virker ikke dette som noe problem, og det er det heller ikke på en vanlig sfære, men dersom man prøver å gjøre dette for en 7-dimensjonal sfære, med tilsvarende 7-dimensjonale kart, så må man gjøre valg underveis for å få det hele til å gå opp. Milnor og Kervaire beviste at det finnes 28 måter å gjøre dette på. En av dem er nokså rett fram, omtrent som i det to-dimensjonale tilfellet, mens de 27 andre er vanskeligere å illustrere. Milnor kalte disse 27 andre for eksotiske strukturer eller eksotiske sfærer.

Isolerte hyperflate-singulariteter

Når vi spaserer langs en vei vil vi til enhver tid finne oss i ett av to forskjellige typer punkter. Den ene typen er de regulære punktene, der vi ikke har noen valg mht. hvor vi skal gå. Disse er alltid i flertall. Men vi må også passere singulære punkter, av typen veikryss, hvor vi har flere muligheter å velge mellom. Singulariteter, som abstrakt matematisk begrep, er en generalisering av veikryssene. Isolerte singulariteter innebærer at de singulære punktene ikke hopper seg opp, det er alltid mange regulære mellom to singulære, og

forstavelsen hyperflate- er en teknisk betegnelse på hvordan singulariteten er definert.

Milnortall

Det finnes generelt mange typer isolerte singulariteter, selv for kurver og flater. Et nyttig verktøy til å karakterisere singulariteter er å bruke deres Milnortall. Vi legger singulariteten inn i en sfære av passende dimensjon, dvs. en mer enn dimensjonen til singulariteten. Snittet av rommet som inneholder singulariteten og sfæren vil se ut som en bukett av sfærer av lavere dimensjon. Antallet slike sfærer kalles Milnortallet til singulariteten. Et regulært punkt har Milnortall 0, og jo høyere Milnortall, jo mer komplisert singularitet.

Die Hauptvermutung (tysk for hovedhypotese) innen geometrisk topologi er hypotesen (en antakelse som man tror er sann, men som enda ikke er bevist) som sier at dersom vi dekker en flate med trekanter på et svært regelbundet vis, og vi gjør dette på to forskjellige måter, ja så finnes det alltid en ytterligere oppdeling av de to trekant-oppdelingene, dvs. med mindre trekanter inne i de gamle, slik at de blir like. Steinitz og Tietze formulerte denne formodningen i 1908, men den ble avkreftet av Milnor for oppdelinger i høye dimensjoner i 1961.

En **mikrobunt** er en generalisering av begrepet vektorbunt. I likhet med vektorbunter inneholder mikrobunter to rom, totalrommet og baserommet, og en projeksjonsavbildning fra det ene på det andre. Mikrobunter har en tilleggsstruktur, i det de er utstyrt med en avbildning den motsatte veien, kalt en nullseksjon. Fibrene til projeksjonsavbildningen, dvs. alle punkter i totalrommet som avbildes på ett og samme punkt i baserommet, er til forveksling lik vanlige vektorrom. Subtiliteten i å konstruere mikrobunter, eller også vektorbunter, ligger i å få alle de enkelte fiberne, som hver for seg ser ut som et vektorrom, til å passe sammen til det store totalrommet. Det kan virke enkelt helt fram til den siste brikken skal på plass. Da må alt stemme hvis ikke hele prosjektet skal falle sammen. Det er i denne siste brikken at

mikrobunter og vektorbunter avslører sin sanne, og dype, matematiske natur.

Grad-2-funktoren og den tilhørende Milnor-formodningen dreier seg om en meget teoretisk, og lite tilgjengelig i daglig-språk, relasjon mellom to forskjellige uttrykk som uttaler seg om egenskaper ved "en kropp av karakteristikk forskjellig fra 2". Relasjonen knytter sammen Milnors K-teori og Galoiskohomologi. Milnor brukte sin intuisjon til å formulere sammenhengen, men klarte ikke å bevise resultatet. Problemet sto uløst i mer enn 20 år, inntil Vladimir Voevodsky presenterte et bevis rundt 1996.

Vekstraten til en gruppe

De mest grunnleggende algebraiske objektene kalles grupper. Grupper opptrer i mange anvendelser, i nesten alle matematiske underdisipliner, i fysikk, kjemi og arkitektur, for å nevne noen. Abelprisen for 2008 ble tildelt John Thompson og Jacques Tits for deres fremragende prestasjoner innenfor algebra, og særlig for utformingen av moderne gruppeteori.

En måte å angi størrelsen på en gruppe er å beregne vekstraten til gruppa. Vi starter med et minimalt sett av generatorer for gruppa, dvs. elementer som til sammen kan gi oss alle andre elementer i gruppa. Vekstraten er et uttrykk for redundansen i denne mengden. Små grupper hvor vi trenger mange gruppelementer for å lage alle andre har lav vekstrate, mens en gruppe der elementene som genererer hele gruppa er veldig uavhengige har høy vekstrate. Dette er tilfellet for de såkalte frie gruppene. Abelprisen for 2009 ble tildelt Mikhail Gromov, delvis på bakgrunn av hans arbeid med vekstrater til grupper.

Et **dynamisk system** er en modell for tidsutviklingen av et fysisk (eller matematisk) system. Som eksempler kan man nevne de matematiske modellene som beskriver varmetransport i en metallstang, fysiske data for atmosfærene som grunnlag for moderne værvarsling og utvikling av en populasjon over tid. På et gitt tidspunkt befinner systemet seg i en tilstand og det dynamiske sys-

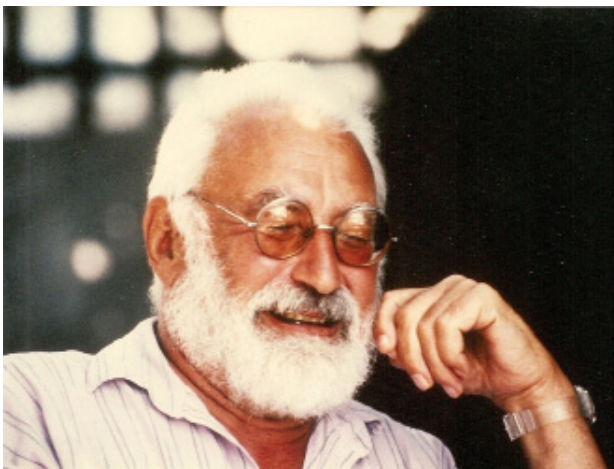


temet gir en deterministisk (mao. kun én mulig utvei) regel for hvordan systemet utvikler seg til framtidige tilstander.

Milnor-Thurstons kna-teori har ingenting med brødbaking å gjøre, men dreier seg om å analysere utfallet av å repetere spesielle avbildninger av et intervall inn i seg selv. Kna-navnet henspiller på at intervallet legges over seg selv og knas sammen og at vi gjentar denne prosessen mange ganger. Teorien ble utviklet av John Milnor og William Thurston i to Princeton-preprints som i ettertid ble svært innflytelsesrike og lest i store kretser av matematikere. Arbeidene ble revidert i 1981 og endelig publisert i 1988. Kna-teorien har vist seg å ha mange interessante anvendelser.

Noen aktuelle navn

Michel André Kervaire (1927-2007) var en fransk matematiker som samarbeidet med John Milnor i arbeidet med å finne antallet eksotiske sfærer i høyere dimensjon enn fire. Han var professor ved Courant Institute ved New York University fra 1959 til 1971. Deretter var han professor ved Universitetet i Geneve fra 1971 til han ble pensjonist i 1997.



John Coleman Moore (1927-) er amerikansk matematiker, hvis mest siterte publikasjon er om Hopf-algebraer, skrevet sammen med John Milnor.

William Paul Thurston (1946-) er amerikansk matematiker. Han regnes som en av pionerene innen feltet som kalles lav-dimensjonal topologi. Han fikk Fields-medaljen i 1982 for sitt bidrag til forståelsen av 3-mangfoldigheter. Han er for tiden professor i matematikk og beregningsvitenskap ved Cornell University. Thurston utviklet Milnor-Thurstons kna-teori sammen med John Milnor på 1970-80-tallet.

Jules Henri Poincaré (1854-1912) var fransk matematiker, teoretisk fysiker, ingeniør og naturvitenskapsfilosof. Han beskrives ofte som den siste universalist siden han publiserte innen omtrent alle felt av matematikken som eksisterte på hans tid. Poincaré er mannen bak Poincaré-formodningen, en av de mest berømt, og lengst-levende, uløste matematiske problemer. Han er også en av grunnleggerne av topologi.

