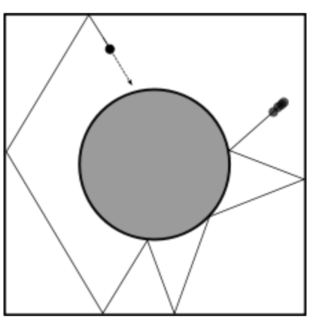
Yakov G. Sinai, Abelprisvinner 2014

DYNAMISK BILJARD

En dynamisk biljard er en idealisert generalisering av spillet biljard, der det tenkte biljardbordet kan ha alle mulige former, og vi bare bruker én ball. Bordet kan gjerne ha høyere dimensjon enn 2, og i noen tilfeller har det også avgrensede felt med vant, hvor ballen ikke slipper inn.

Mer formelt er en dynamisk biljard et dynamisk system hvor en masseløs og punktformet partikkel beveger seg innenfor et avgrenset område. Partiklen veksler mellom å bevege seg friksjonsløst (dvs. med konstant hastighet) langs rette linjer og å reflekteres fra biljard-vantet ved speilende refleksjoner, uten å tape hastighet. Speilende refleksjoner betyr at innfallsvinkel og refleksjonsvinkel er like store.

Et aktuelt eksempel på en dynamisk biljard er Sinais biljard. Sinais biljard består av et kvadratisk bord med et sirkulært felt i midten hvor ballen ikke slipper inn.



Sinais biljard

(Kilde: Georg Stamatiou, Wikipedia)

Bordet er flatt, uten noen form for krumning. Ballen vil vekselvis reflekteres fra det ytre vantet og vantet rundt det sirkulære midtfeltet.

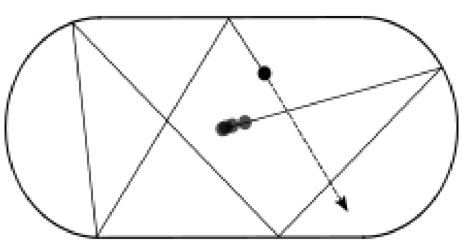
Sinais biljard dukket opp som et resultat av studier av modellen for en såkalt ideell gass. I denne modellen tenker man seg at gass består av en mengde små kuler (gassmolekyler) som støter mot hverandre i elastiske støt og som også reflekteres fra veggene i gassbeholderen. Sinais biljard gir en forenklet, men god beskrivelse av denne modellen. Biljarden ble lansert av Yakov G. Sinai for å illustrere gassens termodynamiske egenskaper; alle baner er **ergodiske**, som betyr at over litt tid så kommer vi så nær vi måtte ønske en hvilken som helst tilstand for gassen, og systemet har **positive Lyapunovs eksponenter**, som betyr at gassen oppfører seg på en kaotisk måte. Sinai viste at molekylbevegelsene i gassen følger banene i Hadamards dynamiske system, slik de ble beskrevet av Jacques Hadamard i 1898, i det første arbeidet som på en systematisk måte studerer kaos.

I motsetning til et vanlig biljardbord trenger ikke en dynamisk biljard å være plan. Men i en krum biljard må vi erstatte rettlinjet bevegelse med bevegelse langs geodetiske kurver, dvs. kurver som beskriver korteste vei mellom to punkter på flaten. Siden ballens bevegelse er rettlinjet (geodesisk) med konstant hastighet, holder det å se på sammenstøtene med vantet for å kunne gi en komplett beskrivelse av ballbanen. I tillegg er systemet deterministisk, dvs. at dersom vi har oppgitt posisjon og utgangsvinkel for et sammenstøt med vantet, så vil neste sammenstøt være bestemt. Avbildningen som til en tilstand tilordner den neste tilstanden, kalles biljardavbildningen. Biljardavbildningen beskriver dynamikken i det dynamiske systemet.

På tross av biljardenes enkle form, er de svært effektive hjelpemidler til å beskrive og å forstå fenomener vi observerer for ideelle gasser.

I en vanlig rektangulær biljard vil vi ikke observere noen kaotisk oppførsel. Selvfølgelig vil en liten variasjon i utgangspunkt og/eller utgangsretning føre til et større avvik etter hvert, men avviket øker kun lineært med tiden, og ikke eksponensielt. Kaotisk oppførsel er nettopp kjennetegnet ved at dette avviket øker eksponensielt.

I Sinais biljard finner vi ekte kaotisk oppførsel, dvs. at avviket mellom to nærliggende baner øker eksponensielt med tiden. Vantet i Sinais biljard har to komponenter, det kvadratiske ytre og det sirkulære indre. Fra partikkelens synspunkt framstår det indre vantet som konkavt. Lenge var man sikker på at det var denne konkave formen til det indre vantet som var bakgrunnen for den kaotisk oppførselen, og at konkaviteten var en nødvendig forutsetning for fenomenet. Refleksjoner fra en konkav flate vil jo i motsetning til refleksjon fra en konveks flate spre lyset, og derfor også ballbanene i biljarden.



Bunimovich biljard

(Kilde: Georg Stamatiou, Wikipedia)

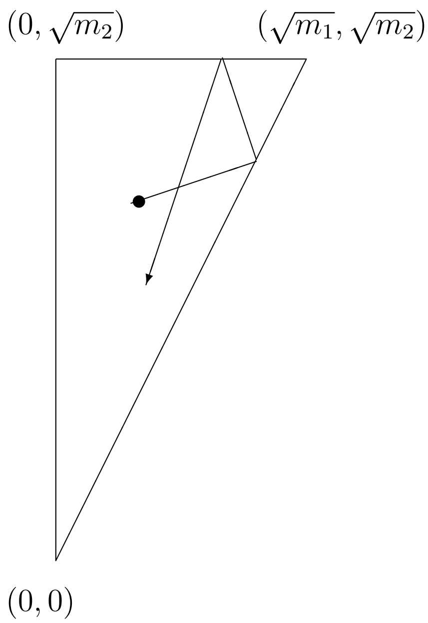
Men i 1974 beviste Bunimovich at et biljardbord formet som et stadion, dvs. med to rette langsider og kortsider erstattet med halvsirkler, produserte ekte kaotisk oppførsel, på tross av at denne biljarden er helt og holdent konveks i formen.

Et eksempel

Vi skal se på et enkelt eksempel på en biljard. Den fysiske modellen omfatter to molekyler, og deres bevegelighet er innskrenket til å være endimensjonal, i intervallet $[0, 1]$. Vi kan tenke oss at molekylene virrer fram og tilbake i et tynt rør. Endene til røret er blokkert, så hver gang en partikkel treffer enden vil den bli reflektert. Farten er den samme etter refleksjonen, bare motsatt rettet. Når de to partiklene møtes får vi også et elastisk sammenstøt. Det betyr at total bevegelsesmengde, så vel som total energi, bevares ved sammenstøtet. Dersom de to partiklene har masse m_1 og m_2, hastighet v_1 og v_2 før sammenstøtet og hastighet w_1 og w_2 etter sammenstøtet, gir dette oss de to likningene for bevaring av bevegelsesmengde og energi,

$$
\begin{aligned}
m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1w_1 + m_2w_2 \\
\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 &= \tfrac{1}{2}m_1w_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2w_2^2
\end{aligned}
$$

Vi beskriver posisjonen til de to partiklene ved hjelp av to koordinater, x_1 og x_2, eller satt sammen som et par (x_1, x_2). Dette paret beskriver en tilstand for systemet. Tilstandsrommet til systemet skal beskrive alle mulige tilstander. I dette eksempelet krever vi at begge partiklene skal befinne seg inne i røret, dvs. at vi har $0 \leq x_1 \leq 1$ og $0 \leq x_2 \leq 1$. I tillegg er det umulig for de to partiklene å bytte plass, så dersom vi antar at partikkel nr. 2 befinner seg til høyre for partikkel 1, så får vi tilleggsbetingelsen $x_1 \leq x_2$. Vi former et trekantet biljardbord, med hjørner i punktene $(0,0)$, $(0,\sqrt{m_2})$ og $(\sqrt{m_1},\sqrt{m_2})$. På bordet lar vi en biljard-kule trille rundt og sprette tilbake etter sammenstøt med veggene. Et punkt (x,y) svarer til at kule nr. 1 befinner seg i posisjon $x_1 = \frac{x}{\sqrt{m_1}}$ og kule nr. 2 i posisjon $x_2 = \frac{y}{\sqrt{m_2}}$. Dersom kulene kolliderer, så har vi $x_1 = x_2$ som betyr at (x,y) ligger på den skrå linja i biljarden.



Bevaring av bevegelsesmengde og energi gir at

$$w_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$$
$$w_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

som betyr $v_2 - v_1 = w_1 - w_2$. Refleksjon langs skrålinja i billiarden er gitt ved

$$\begin{aligned}(\sqrt{m_1}v_1, \sqrt{m_2}v_2) \cdot (-\sqrt{m_2}, \sqrt{m_1})\\ = -(\sqrt{m_1}w_1, \sqrt{m_2}w_2) \cdot (-\sqrt{m_2}, \sqrt{m_1})\end{aligned}$$

eller $-v_1 + v_2 = w_1 - w_2$. Med andre, ord, trekant-biljarden gir oss en komplett beskrivelse av dynamikken i den 1-dimensjonale gassmodellen.