Yakov G. Sinai, Abelprisvinner 2014

ENTROPIEN TIL ET DYNAMISK SYSTEM

På slutten av 1950-tallet ledet matematikeren Andrey Kolmogorov et seminar om dynamiske systemer ved universitetet i Moskva. Et spørsmål som stadig dukket opp på seminaret dreide seg om hvordan man kunne avgjøre om to dynamiske systemer er strukturelt like eller ikke. Svaret kom fra den unge seminardeltageren Yakov Sinai og handlet om entropi.

La oss starte med å ta et skritt tilbake. I 1948 publiserte den amerikanske matematikeren Claude E. Shannon en artikkel under tittelen "*A Mathematical Theory of Communication*". Hans ide var å bruke matematisk formalisme til å beskrive kommunikasjon som fenomen. Formålet med kommunikasjon er å formidle et budskap, men de som står for kommunikasjonen velger selv hvordan de vil gjøre det. Noen bruker mange ord eller tegn, mens andre kan få fram en klar mening på en mer kortfattet måte. Informasjonsmengden kan være den samme, men informasjonstettheten vil variere. Et eksempel er såkalt SMS-språk. Når man taster på en mobiltelefon forsøker man å få fram en bestemt mening ved bruk av færrest mulige tastetrykk. Meldingen "I love You" består av 10 tegn, mens meldingen "i $<$ 3 u" klarer seg med 6. Likevel formidler meldingene nøyaktig samme budskap. Shannon introduserte begrepet **entropi** som et mål for informasjonstetthet. I hvilken grad vil neste tegn i meldingen fortelle oss noe vi ikke allerede vet? Høy Shannon-entropi betyr at hvert nytt tegn lærer oss noe nytt om budskapet, lav Shannon-entropi uttrykker at vi kun får bekreftet det vi allerede vet.

Et dynamisk system er en beskrivelse av et fysisk system og hvordan det utvikler seg over tid. Systemet kan befinne seg i mange mulige **tilstander**, og hver tilstand representeres av et element i et **tilstandsrom**. Tilstandsrommet blir en slag geometrisk adressebok, en fortegnelse over alle mulige tilstander. Dynamikken, eller utviklingen i det dynamiske systemet, er beskrevet av en vei i tilstandsrommet. Veien forteller oss hvordan systemet går videre fra en gitt tilstand til neste.

Dynamiske system kan være **deterministiske**. Det innebærer at neste tilstand er forutbestemt. For eksempel er dette tilfellet for en svingende pendel. På et gitt sted i banen og med en gitt hastighet, vil fysikkens lover beskrive hva som skjer videre med pendelen. Dersom systemet dreier seg om å kaste terning, har vi en annen ytterlighet, der systemet er **stokastisk**. Framtida er fullstendig uviss, forrige kast sier ingenting om hva neste kast vil gi. Normalt vil vi ha god oversikt over hva som skjer på kort sikt innenfor et dynamisk system. På lang sikt derimot, er det mye vanskeligere å få full oversikt. Problemet med værvarsling illustrerer dette fenomenet. Værsituasjonen, gitt ved trykk, temperatur, vind, luftfuktighet osv. beskrives av et dynamisk system. Det er få vanskeligheter knyttet til å varsle været for de neste ti minuttene, men går vi ti dager fram i tid blir usikkerheten veldig stor.

Sinai ønsket å kvantisere denne karakteristikken av et dynamisk system. Inspirert av Shannons entropi for informasjon, og innen rammen av Kolmogorovs matematiske verksted, definerte Sinai begrepet entropi for såkalte mål-bevarende dynamiske system, i dag kjent som **Kolmogorov-Sinai-entropi**. Dette begrepet ga et konstruktivt svar på spørsmålet fra Kolgomorovs seminar: Kolmogorov-Sinai-entropi er i stor grad i stand til å skille ulike dynamiske systemer fra hverandre.

Kolmogorov-Sinai-entropi gir en rik generalisering av Shannons entropi. En melding i Shannons forstand, gitt ved en uendelig sekvens av tegn, svarer til en tilstand, og tilstandsrommet består av alle uendelige sekvenser. Dynamikken dreier seg om å flytte blikket et hakk videre i sekvensen. Entropi handler om i hvilken grad det er mulig å forutse neste tegn i sekvensen.

I et annet eksempel kan det fysiske systemet være en beholder fylt med gass. Tilstander i dette systemet er beskrevet av gass-molekylenes posisjon og hastighet på et gitt tidspunkt, og dynamikken er gitt av naturlover som forutsier hvilken tilstand gassen vil være i et lite tidsintervall senere. Igjen vil graden av kompleksitet og kaotisk oppførsel hos molekylene være det som kodes inn i begrepet entropi.

Kolmogorov-Sinai-entropi er altså et mål på uforutsigbarhet i et dynamisk system. Jo mer uforutsigbarhet vi finner i prosessene, jo større er systemets entropi. Dette passer godt med Shannons informasjonsteoretiske entropi, hvor uforutsigbarhet om hva som vil bli formidlet faktisk er det som kommer til å gi oss ny informasjon. Det passer også godt med begrepet entropi slik vi kjenner det fra termodynamikken, der større uorden gir større entropi. Uforutsigbarhet og uorden er nært beslektet.

Kolmogorov-Sinai-entropi har hatt stor betydning for vår forståelse av kompleksitet av dynamiske systemer. Selv om ikke den formelle definisjonen er spesielt komplisert, viser begrepet sin styrke gjennom de svært treffsikre svarene det gir på sentrale spørsmål innenfor klassifikasjon av slike systemer.

Matematisk formalisme

La $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ være et dynamisk system, og la $Q = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ være en disjunkt oppdeling av X i k målbare deler. Vi definerer T-tilbaketrekkingen av Q ved

$$T^{-1}Q = \{T^{-1}Q_1, \ldots, T^{-1}Q_k\}$$

Gitt to oppdelinger $Q = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ og $R = \{R_1, \ldots, R_m\}$. Da kan vi definere deres felles forfining ved

$$Q \vee R = \{Q_i \cap R_j \mid \mu(Q_i \cap R_j) > 0\}$$

Ved å kombinere disse to konstruksjonene får vi **forfiningen av en iterert tilbaketrekking**;

$$\bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}Q = \{Q_{i_0} \cap T^{-1}Q_{i_1} \cap \cdots \cap T^{-N}Q_{i_N}\}$$

Entropien til en oppdeling Q er definert som

$$H(Q) = -\sum_{m=1}^{k} \mu(Q_m) \log \mu(Q_m)$$

og vi setter

$$h_\mu(T, Q) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}Q)$$

Kolmogorov-Sinai-entropi av $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ er definert ved

$$h_\mu(T) = \sup_{Q} h_\mu(T, Q)$$

hvor vi tar supremum over alle endelige, målbare oppdelinger.