



John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg,  
Abelprisvinnere 2015

---

## INTRINSISKE ELLER EKSTRINSIKE EGENSKAPER?

I matematikk er det veldig viktig å skille mellom egen-egenskaper (intrinsiske) og ikke-egen-egenskaper (ekstrinsiske) til et geometrisk objekt. En intrinsisk egenskap vil ikke endre seg, uansett hvordan vi representerer objektet, mens en ekstrinsisk egenskap ikke besitter denne uforanderligheten.

En engelsk ordbok definerer ordet intrinsisk som *Belonging to a thing by its very nature*. Det innebærer at en intrinsisk egenskap er en egenskap ved et objekt som er uavhengig av hvordan eller i hvilken sammenheng objektet manifesterer seg. Det motsatte er en ekstrinsisk egenskap. Lengden av en kurve er en intrinsisk egenskap ved kurven, mens krumningen er ekstrinsisk. Bare tenk på kurven som et langt tau, lengden er konstant, mens krumningen er avhengig av hvordan vi kveiler opp tauet.

Krumningen til en kurve som begrep ble introdusert så tidlig som på 1300-tallet, men mer grundig forstått av blant annet Leonhard Euler noen hundre år senere. Men den virkelige dype forståelsen av geometriske størrelser og begreper kom da Carl Friedrich Gauss begynte å studere flater og stilte spørsmålet rundt krumningens natur, spesielt om hvorvidt krumningen er en intrinsisk eller en ekstrinsisk egenskap. Det er ikke tilfeldig at Gauss tok for seg krumning ved denne anledningen, i motsetning til hva som er tilfelle for en kurve, så er krumning en intrinsisk egenskap for en flate.

I *Disquisitiones generales circa superficies*

*curvas* fra 1827 formulerer Gauss det såkalte Theorema Egregium:

*Si superficies curva in quacunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

(I engelsk oversettelse: "If a curved surface is developed upon any other surface whatever, the measure of curvature in each point remains unchanged.") I moderne språkdrakt ville vi si at *Gauss-krumning er en intrinsisk egenskap ved en flate*. Teoremet ble kalt *oppsiktsvekkende (egregium)* siden krumning opprinnelig var definert ekstrinsikt.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855),  
malt av Christian Albrecht Jensen

Påvirket av Gauss sin geometri på en flate i det euklidske 3-rommet, introduserte Bernhard Riemann (1826-1866) i 1854 det som i dag kalles Riemannsk geometri. Riemannsk geometri generaliserer Euklidsk geometri, og ble umiddelbart et viktig verktøy i utviklingen av geometriske og fysiske ideer på andre halvpart av 1800-tallet. En Riemannsk mangfoldighet er et geometrisk objekt med en intrinsisk definisjon, definisjonen refererer

ikke til noen embedding av objektet i noe større, omliggende rom.

Med det bejublete embeddingsteoremet til John F. Nash, Jr. kan geometere betrakte Riemannske mangfoldigheter som undermangfoldigheter av euklidske rom. Dermed blir det et fundamentalt problem å gå opp en grense mellom intrinsiske og ekstrinsiske egenskaper til en undermangfoldighet i et Euklidsk rom.

Det var lenge en sannhet at alle egenskaper til et geometrisk objekt var definert ekstrinsisk, dvs. det var vel egentlig ikke noen problemstilling. Et hvert geometrisk objekt befant seg jo i et rom og tanken på at objektet skulle leve sitt eget abstrakte liv, løsrevet fra rommet, var utenkelig. Men Gauss plantet ideen om at noen egenskaper var egenskaper ved objektet i seg selv, mens andre egenskaper hadde sitt utspring i objektets manifestasjon som underobjekt av et Euklidsk rom. Riemann tok dette aspektet videre og redefinerte de geometriske objektene ved deres intrinsiske egenskaper. Embeddingsteoremene fra 1950-tallet gir en måte å slutte ringen, ved å slå fast at alle Riemannske mangfoldigheter kan realiseres som undermangfoldigheter av et Euklidsk rom, og på den måten åpne for ekstrinsiske beskrivelser av intrinsiske egenskaper.