



THE
ABEL
PRIZE
2020

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å gi Abelprisen 2020 til

Hillel Furstenberg

Hebrew University
of Jerusalem, Israel

Gregory Margulis

Yale University, New Haven,
Connecticut, USA

“for banebrytende anvendelser av metoder fra sannsynlighetsteori og dynamikk på gruppeteori, tallteori og kombinatorikk.”

En sentral gren av sannsynlighetsteori er studiet av virrevandringer (random walks), slik som vandringen til en turist som utforsker en ukjent by ved å kaste mynt og kron for å velge mellom å ta til høyre eller venstre i hvert gatekryss. Hillel Furstenberg og Gregory Margulis oppfant liknende random walk-teknikker for å undersøke strukturen til lineære grupper, for eksempel en mengde matriser som er lukket under den inverse og produktet. Ved å ta produkter av tilfeldig valgte matriser søker man å beskrive hvordan resultatet vokser og hva denne veksten sier om gruppens struktur.

Furstenberg og Margulis introduserte visjonære og kraftige begreper, løste formidable problemer og oppdaget overraskende og fruktbare forbindelser mellom gruppeteori, sannsynlighetsteori, tallteori, kombinatorikk og grafteori. Arbeidene deres dannet en skole som har hatt gjennomgripende innflytelse på mange områder innen matematikken og dens anvendelser.

Med utgangspunkt i studiet av tilfeldige produkter av matriser introduserte og klassifiserte Hillel

Furstenberg i 1963 et begrep av fundamental betydning, som nå kalles Furstenbergs rand. Ved hjelp av dette satte han opp en Poisson-type formel som uttrykker en harmonisk funksjon på en generell gruppe ved dens randverdier. I sine arbeider om virrevandringer på begynnelsen av 60-tallet, noen av dem i samarbeid med Harry Kesten, fant han også et viktig kriterium for positivitet av den største Lyapunov-eksponenten.

Motivert av diofantiske approksimasjoner introduserte Furstenberg i 1967 begrepet disjunktivitet (disjointness) av ergodiske systemer, et begrep som er beslektet med det at to heltall er relativt primiske. Dette naturlige begrepet viste seg å være ekstremt gjennomgripende og fikk anvendelser på en lang rekke områder som for eksempel signalbehandling og filterteori, innen elektroteknikk, geometrien til fraktaler, homogen dynamikk og tallteori. Hans “ $\times 2 \times 3$ -formodning” er et vakkert og enkelt eksempel som har ført til mange videre utviklinger. Han betraktet de to avbildningene å kvadrere og ta tredje potens av tall på den komplekse enhetssirkelen, og beviste



at de eneste lukkede mengdene som er invariante under begge disse avbildningene er enten endelige eller hele sirkelen. Han formoder at de eneste invariante målene er enten endelige eller rotasjonsinvariante. Til tross for mange matematikeres innsats står dette spørsmålet om klassifisering av mål fortsatt åpent. Klassifisering av invariante mål under gruppevirksomheter har blomstret opp til et stort forskningsfelt med betydning for kvantearitmetisk ergodisitet, translasjonsflater, Margulis' versjon av Littlewoods formodning og de spektakulære arbeidene til Marina Ratner. Ved å betrakte invariante mål i en geometrisk sammenheng beviste Furstenberg i 1972 den unike ergodisiteten til horosyklisk flyt på hyperbolske flater — et resultat med mange konsekvenser.

Ved hjelp av ergode-teori og teoremet sitt om multippel rekurrens kom Furstenberg i 1977 med et praktfullt nytt bevis på Szemerédis teorem om eksistensen av lange aritmetiske progresjoner i delmengder av heltall med positiv tetthet. I påfølgende arbeider med Yitzhak Katznelson, Benjamin Weiss og andre fant han høyeredimensjonale og vidtrekkende generaliseringer av Szemerédis teorem og andre anvendelser av topologisk dynamikk og ergodeteori for Ramsey-teori og additiv kombinatorikk. Disse arbeidene har påvirket mange senere utviklinger, herunder arbeidene til Ben Green, Terence Tao og Tamar Ziegler om Hardy–Littlewood-formodningen og aritmetiske følger av primtall.

Gregory Margulis revolusjonerte studiet av gitter i semisimple grupper. Et gitter i en gruppe er en diskret undergruppe slik at kvotienten har et endelig volum. For semisimple grupper klassifiserte Margulis disse gitrene i sine teoremer om "superrigiditet" og "aritmetisitet" i midten av 1970-årene. Armand Borel og Harish-Chandra konstruerte gitre i semisimple grupper ved hjelp av aritmetiske konstruksjoner, hovedsakelig som gruppen av matriser med heltallsverdier i en stor matrisegruppe. Margulis beviste at alle gitre med rank 2 eller høyere kan lages ved denne aritmetiske konstruksjonen, som formodet av Atle Selberg. I 1978 beskrev Margulis strukturen i disse gitrene i sitt "normalundergruppe teorem". Sentralt for hans

teknikker er forbløffende og overraskende bruk av sannsynlighetsmetoder (random walks, Oseledets teorem, amenability, Furstenbergs rand) så vel som Kazhdans egenskap (T).

I sin doktoravhandling i 1970 konstruerte Margulis det såkalte "Bowen–Margulis-målet" for en kompakt Riemann-manifoldighet med strengt negativ variabel krumning. Ved hjelp av blandingsegenskapen til geodetiske strømmer i forhold til dette målet, beviste han en analog til primtallsteoremet, en asymptotisk formel for antall lukkede geodetiske kurver som er kortere enn en gitt lengde. Før dette var det eneste slike telleresultatet via Selbergs sporformel, som bare fungerer for lokalt symmetriske rom. Siden den gang har tallrike telle- og ekvidistribusjonsproblemer blitt studert ved hjelp av Margulis' blandingstilnærming.

En annen spektakulær anvendelse av hans metoder er beviset i 1984 av den flere tiår gamle Oppenheim-formodningen innen tallteori: En ikke-degenerert kvadratisk form med 3 eller flere variable tar enten et tett sett av verdier på heltallene eller er et multiplum av en form med rasjonale koeffisienter.

I grafteori resulterte Margulis' kreativitet i hans konstruksjon i 1973 av den første kjente eksplisitte familie av ekspandere ved hjelp av Kazhdans egenskap (T). En ekspander er en graf med høy konnektivitet. Dette begrepet, som ble innført av Mark Pinsker, kommer fra studiet av nettverk i kommunikasjonssystemer. Ekspandergrafer er nå et grunnleggende redskap innen informatikk og feilkorrigeringskoder. I 1988 konstruerte Margulis optimale ekspandere, nå kjent som Ramanujan-grafer, som ble oppdaget uavhengig av Alex Lubotzky, Peter Sarnak og Ralph Phillips.

Furstenberg og Margulis' innflytelse strekker seg langt ut over deres resultater og opprinnelige arbeidsfelt. De er anerkjent som pionerer av et stort samfunn av matematikere innen Lie-teori, diskrete grupper og tilfeldige matriser, til informatikk og grafteori. De har vist at sannsynlighetsmetoder er allestedsnærværende og demonstrert betydningen av å krysse grensene mellom separate matematiske disipliner, som det tradisjonelle skillet mellom ren og anvendt matematikk.

