XIV.

NOTE SUR LA FONCTION $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$

La fonction $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$ jouit de plusieurs propriétés remarquables, que je vais établir dans cette note. On trouve quelques-unes de ces propriétés dans *Legendre* Exerc. de calc. int. t. I, p. 244 et suiv. Les autres, si je ne me trompe, sont nouvelles. Comme la série $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$ n'est convergente que lorsque x ne surpasse pas l'unité, il s'ensuit que la fonction ψx n'a de valeur que pour les x compris entre les limites -1 et $+1$. Pour toute autre valeur de x, la fonction n'existe pas, parce qu'elle est exprimée par une série divergente. Nous supposons donc toujours x compris entre les limites -1 et $+1$.

En différentiant on obtient

$$d\,\psi x = dx\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$d\,\psi x = -\frac{dx}{x}\log(1-x);$$

donc

$$\psi x = -\int \frac{dx}{x}\log(1-x), \tag{1}$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$.

De cette expression de ψx il est facile de déduire les propriétés de cette fonction. En mettant $1-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(1-x) = \int \frac{dx}{1-x} \log x,$$

et par suite

$$\psi x + \psi(1-x) = -\int \left(\frac{dx}{x} \log(1-x) - \frac{dx}{1-x} \log x \right);$$

donc

$$\psi x + \psi(1-x) = C - \log x \,.\, \log(1-x).$$

Si l'on fait ici $x=0$, $\log x \,.\, \log(1-x)$ disparaît, et l'on a $\psi(1) = C$; mais

(2) $$\psi(1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en conclut

(3) $$\psi x + \psi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \,.\, \log(1-x).$$

Cette formule donne la valeur de la fonction ψx pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction pour les x qui sont compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Lorsque $x = \frac{1}{2}$, cette formule donne

(4) $$\psi(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

Si dans l'expression de ψx on met $-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(-x) = -x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} - \cdots,$$

donc

$$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots \right);$$

c'est-à-dire, puisque $x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = \psi(x^2)$,

(5) $$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\psi(x^2).$$

Cette formule donne la fonction ψx pour les valeurs négatives de x, lorsqu'on connaît la fonction pour les valeurs positives de la variable. Dans le cas particulier où l'on fait $x=1$, on obtient

(6) $$\psi(-1) = -\tfrac{1}{2}\psi(1) = -\frac{\pi^2}{12},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

ce qui est connu.

Si dans l'équation (1) on met $\frac{x}{x+1}$ au lieu de x, il viendra

$$\psi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \int\left(\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1}\right)\log(1+x) = \int\frac{dx}{x}\log(1+x) - \int\frac{dx}{x+1}\log(x+1).$$

Or on a évidemment

$$\int\frac{dx}{x}\log(1+x) = -\psi(-x),$$

$$\int\frac{dx}{1+x}\log(1+x) = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2;$$

donc, en remarquant que la constante arbitraire due à l'intégration est zéro,

$$(7) \qquad \psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \psi(-x) = -\tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2.$$

En éliminant la quantité $\psi(-x)$ des équations (5) et (7), on obtiendra la suivante:

$$(8) \qquad \psi x = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2 + \tfrac{1}{2}\psi(x^2) + \psi\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot$$

Par cette formule on peut exprimer une fonction donnée ψx par d'autres fonctions, dans lesquelles la variable est aussi petite qu'on voudra. Car lorsque x est positif et moindre que l'unité, on a $x^2 < x$ et $\frac{x}{x+1} < x$. Si l'on fait par exemple $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{3}$, la formule donne

$$\psi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{4}) + \psi(\tfrac{1}{3}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{9}) + \psi(\tfrac{1}{4}).$$

En combinant ces deux équations avec celle-ci

$$\frac{\pi^2}{12} = \tfrac{1}{2}(\log 2)^2 + \psi(\tfrac{1}{2}),$$

on trouvera

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \frac{\pi^2}{18} - \tfrac{1}{6}(\log 3)^2 + \tfrac{1}{6}\psi(\tfrac{1}{9}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{18} + 2\log 2 \,.\, \log 3 - 2(\log 2)^2 - \tfrac{2}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{1}{3}\psi(\tfrac{1}{9}).$$

De cette manière les fonctions $\psi(\frac{1}{3})$ et $\psi(\frac{1}{4})$ sont exprimées par des quantités connues et la fonction $\psi(\frac{1}{9})$. Si dans l'équation (8) on fait $x = \frac{1}{9}$, on obtient

$$\psi(\tfrac{1}{9}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{10}{9})^2 + \psi(\tfrac{1}{10}) + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{81})\cdot$$

etc.

Toutes les formules démontrées ci-dessus se trouvent dans l'ouvrage cité de M. *Legendre.* Elles ne contiennent, comme on le voit, qu'une seule quantité arbitraire. Je vais maintenant en démontrer quelques autres, qui contiennent deux quantités indépendantes entre elles, et desquelles les formules précédentes doivent être considérées comme des cas particuliers.

Si dans l'équation

$$\psi x = -\int \frac{dx}{x} \log(1-x)$$

on met $\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}$ à la place de x, on aura, en considérant a comme constant,

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \left(\frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y}\right) \log \frac{1-a-y}{(1-a)(1-y)};$$

c'est-à-dire

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) + \int \frac{dy}{y} \log(1-y)$$
$$-\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) + \int \frac{dy}{1-y} \log(1-a).$$

Toutes les intégrales du second membre de cette équation peuvent s'exprimer par la fonction ψ. En effet, on a

$$\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) = -\psi\left(\frac{y}{1-a}\right),$$
$$\int \frac{dy}{y} \log(1-y) = -\psi(y);$$

donc

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) - \int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right).$$

Soit $\frac{a}{1-y} = z$ ou, ce qui revient au même, $1-y = \frac{a}{z}$, $dy = \frac{adz}{z^2}$, on aura $\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) = \int \frac{dz}{z} \log(1-z) = -\psi(z) = -\psi\left(\frac{a}{1-y}\right)$; donc l'équation ci-dessus donnera

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) + \psi\left(\frac{a}{1-y}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) + C.$$

Pour déterminer la constante arbitraire, soit $y = 0$, on aura $C = -\psi(a)$. On aura par conséquent, en écrivant x au lieu de a,

$$(9)\quad \psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=\psi\left(\frac{y}{1-x}\right)+\psi\left(\frac{x}{1-y}\right)-\psi y-\psi x-\log(1-y)\log(1-x).$$

Dans cette formule x et y doivent avoir de telles valeurs que les quantités $\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x ne surpassent pas l'unité. C'est ce qui aura lieu lorsque x et y sont positifs, si $x+y<1$. Si y est négatif et égal à $-m$ on doit avoir $x+m<1$; et si x et y sont tous deux négatifs, il suffit qu'aucune de ces quantités ne surpasse l'unité.
